Théorème de Bertini et variantes.

Dans la suite k désigne un corps, $P^r = P^r_k$.

Théorème de Bertini 1: Soit $f:X\to P^r_k$ un morphisme, où X est un schéma algébrique géométriquement irréductible, et soit n = dim $\overline{f(X)}$. Soit L_t le sous-espace linéaire de codimension s générique de P^r , où s est un entier fixé $\leqslant$ n-1. Alors $Y_t = f_t^{-1}(L_t) \subset X_t = X\otimes_k k(t)$ est géométriquement irréductible.

traité dans EGA V

Enoncé local 2: Soit $f:X\to P^r$ un morphisme, avec X un schéma algébrique. Soit $Z\to X$ l'ensemble des points de X en lesquels soit f est ramifié soit X n'est pas géométriquement unibranche (resp. non normal, resp. non lisse ...), et supposons que $\overline{f(Z)}$ soit de dimension < s . Alors $Y_t = f_t^{-1}(L_t)$ est géométriquement unibranche (resp. normal, resp. lisse ...), où L_t est comme ci-dessus.

De ces deux énoncés on déduit formellement;

Corollaire 3: Soit $f: X\to P^r$ satisfaisant les conditions de 1, et 2 non respé. Supposons k alg. clos. Alors le morphisme canonique

$$\pi_1(Y_{\overline{t}})\to\pi_1(X)$$

est surjectif.

Remarque 4. Utilisant les théorèmes de changement de base pour le π_1, on conclut (posant $X_{\overline{t}} = X\otimes_k k(\overline{t})$) que l'homomorphisme

(*) $$\pi_1(Y_{\overline{t}})\to\pi_1(X_{\overline{t}})$$

est surjectif si X est propre, et que l'homomorphisme

(**) $$\pi_1^!(Y_{\overline{t}})\to\pi_1^!(X_{\overline{t}})$$

est surjectif, où le ! désigne le plus grand quotient profini premier à l'exposant car. de k. On n'affirme pas, cependant, que (*) soit toujours surjectif (sans hypothèse de propreté sur X).

On déduit, de 1, par une application facile du théorème de connexité:

tr. dans EGA V

Corollaire 4 (de 1): Sous les conditions de 1) pour $f: X\to P^r$, si X

M2

est de plus propre, alors pour toute sous-variété linéaire L_t de codimensio s, $Y_t = f_t^{-1}(L_t)$ est géométriquement connexe.

Conjuguant avec 2, on trouve, par l'argument qui a permis de déduire 3 de 1 :

cf. SGA 1 X 2.11

Corollaire 5: ~~Avec~~ Sous les hypothèses de 3, avec X propre, l'homomorphisme danonique $\pi_1(Y_{\bar{t}}) \to \pi_1(X)$ $(\simeq \pi_1(X_{\bar{t}})$ par le théorème de changement de base) est surjectif.

Nous désirons également un énoncé analogue à 5, donnant une surjectivité pour des π_1 pour un t non générique, mais sans hypothèse de propreté, et pour des quotients plus gros du π_1 que ceux envisagés dans (xx).

On peut donner à ce sujet le résultat suivant:

Théorème 6. Supposons k algébriquement clos, et X propre, $f: X \to P^r$, le sous-espace linéaire L_t de P^r de codimension s (défini sur k, pour fixer les idées) et enfin le sous-schéma fermé D de X tels qu'on ait ceci;

a) $Y_t = f^{-1}(L_t)$ est non vide.

b) Pour tout $x \in Y_t$, X est lisse en x, Y_t est lisse en x, de codimension s dans X en x, f est net en x.

c) Pour tout $x \in D_t = D \cap Y_t$, ou bien $\mathrm{codim}_x(D_t, Y_t) \geq 2$, ou bien D_t est un diviseur sur X en x et induit sur Y_t en x un diviseur à croisements normaux.

Supposons U = X-D irréductible, et considérons l'inclusion $U_t = U \cap Y_t \to U$. Soit $\pi_1^t(U)$ le quotient du groupe fondamental de U qui classifie les revètements de U qui sont modérément ramifiés en les composantes irréductibles de codimension 1 de D dans X qui rencontrent Y_t, et $\pi_1^t(U_t)$ le quotient analogue de $\pi_1(U_t)$ qui classifie les revètements qui sont modérément ramifiés en les composantes irréductibles de codimension 1 de D_t. On a un homomor-

113

phisme évident

$$\pi_1^t(U_t) \to \pi_1^t(U)$$

(un point-base géométrique de U_t étant choisi). Cet homomorphisme est surjectif.

Démonstration. Lorsqu'on remplace L_t par $L_{t'}$ générique, alors la conclusion est contenue dans le corollaire 3, en d'autres termes, si V est un revêtement étale connexe ~~de U~~ (satisfaisant la condition de modération envisagée - en fait, ce n'est pas nécessaire, en vertu de 3) alors sa restriction $V_{t'}$ au dessus de $U_{t'}$ est connexe. On veut prouver que sa restriction V_t au dessus de U_t est également connexe. Or pour un paramètre variable sur un voisinage ouvert assez petit T de t ~~la grassmanienne des~~ $L_{t'}$, ~~et voisin de t, la famille~~ la famille des $Y_{t'}$ est un morphisme propre et lisse $Y \to T$, et celle des $D_{t'}$ est un sous-schéma fermé Δ de Y, qui est la réunion d'un sous-schéma Δ_1 qui est de codimension ≥ 2 sur chaque fibre (et qui ne compte pas, à cause du théorème de pureté relative) et d'un diviseur Δ_2 à croisements normaux relatifs. Le revêtement donné V de U définit un revêtement V' de $U' = Y - \Delta$, et il faut montrer que la restriction de celui-ci à la fibre géométrique de t est connexe, sachant qu'il en est ainsi de sa restriction à la fibre géométrique en t', la générisation maximale de t. Or par la pureté, on sait que V' se prolonge en un revêtement étale V" de U" = $Y - \Delta_2$, et par hypothèse ce dernier est modérément ramifié sur les fibres, relativement au diviseur Δ_2 . La conclusion est alors une conséquence du théorème de spécialisation pour le groupe fondamental modéré, qui figure(ra) dans SGA 1 XIII (exposé de Mme Raynaud).

Remarque 7. Avec les notations de SGA 7 XVIII, 6 s'applique pour tout pinceau de Lefschetz D pour fournir la surjectivité des ~~quotients par~~

114

l'homomorphisme $\pi_1^t(D-\check{D}) \to \pi_1^t(P-\check{X})$, et donne le théorème de conjugaison des cycles évanescents (donc le théorème d'irréductibilité de la cohomologie évanescente) pourvu qu'on ne soit pas dans le cas car.k=2 et dimX impaire (NB ~~ce n'est pas,~~ dans la situation du th. de Griffiths, il n'y a donc pas d'ennui). Dans ce dernier cas, par contre, je ne sais ~~rien~~ pas prouver la conjugaison sous $\pi_1(D-\check{D})$, sauf pour un pinceau générique, puisqu'alors la représentation envisagée est sauvage; j'ignore si ~~elle~~ reste vraie pour un pinceau général. Noter cependant que la conjugaison des sous-groupes de monodromie locale, dans $\mathrm{Aut}(H^{n-1}(\check{X}_t))$ (qui est très élémentaire) reste vraie, bien entendu, et celle-ci suffit pour prouver le théorème que j'ai proposé (au par. 6 de XVIII) caractérisant le cas où la condition (A) n'est pas vérifiée.

115

Comportement fonctoriel des groupes d'inertie.

1. Soient X un schéma, U un ouvert de X, G un groupe profini, U' un revêtement principal de U de groupe G, x un point géom de X, $\overline{X}$ le localisé strict de X en x, $\overline{U}$ l'image inverse de U dans $\overline{X}$, $\overline{U}' = U' \times_U \overline{U}$. On suppose donné de plus un schéma $\overline{X}'$ sur $\overline{X}$, avec des opérations de G sur $\overline{X}'$, de telle façon que le $\overline{U}$-schéma à opérateurs $\overline{X}'|\overline{U}$ coïncide avec $\overline{U}'$.

Pratiquement, on sera intéressé par le cas où $x \in X-U$ et où x est adhérent à U, où $\overline{X}'$ est entier sur $\overline{X}$ et où $\mathcal{O}_{\overline{X}} = \overline{p}(\mathcal{O}_{\overline{X}'})^G$, $p: \overline{X}' \to \overline{X}$ étant la projection canonique, - de sorte que G opère transitivement sur l'ensemble fibre $\overline{X}'_{\overline{x}}$. De plus, on sera le plus souvent sous des conditions où on peut construire canoniquement $\overline{X}'$ en termes de $\overline{U}'$; par exemple, si on suppose X normal en x, donc $\overline{X}$ normal, et $\overline{U}$ non vide, on définira $\overline{X}'$ comme le normalisé de $\overline{U}$ relativement à $\overline{U}'$ sur $\overline{U}$ (i.e. comme limite projective des normalisés dans les $\overline{U'(i)}$ sur $\overline{U}$, U' étant écrit comme limite projective de schémas principaux U'(i) sur les groupes quotients finis G(i) de G).

Si maintenant ξ est un point de $\overline{X}'_{\overline{x}}$, on peut considérer le groupe de stabilité G_ξ de ξ, formé des $g \in G$ tels que $g.\xi = \xi$; ce groupe prendra le nom de <u>groupe d'inertie</u> <u>relatif à</u> ξ. Dans le cas envisagé plus haut où les points de $\overline{X}'$ sur $\overline{x}$ sont tous conjugués sous G, on voit que pour ξ variable, les G_ξ parcourent une classe de sous-groupes conjugués de G, qu'on appelera (par abus de langage) les sous-groupes d'inertie relatifs à x. Noter qu'en toute rigueur cette classe de sous-groupes n'est pas déterminée par la seule connaissance de $x \in X$, mais dépend du choix du prolongement de $\overline{U}'$ en $\overline{X}'$. Lorsque X est normal en x et que x est spécialisation d'un point de U (ce qui signifie que x est adhérent à U si esp(X) est localement noethérien), il sera sous-entendu, sauf mention du contraire, que le choix en question est fait par normalisation, comme expliqué plus haut.

116

Comportement fonctoriel des groupes d'inertie.

4 Soient X un schéma, U un ouvert de X, G un groupe profini, U' un revêtement principal de U de groupe G, x un point de X, $\overline{X}$ le localisé strict de X en x, $\overline{U}$ l'image inverse de U dans $\overline{X}$, $\overline{U}' = U' \times_U \overline{U}$. On suppose donné de plus un schéma $\overline{X}'$ sur $\overline{X}$, avec des opérations de G sur $\overline{X}'$, de telle façon que le schéma à opérateurs $\overline{X}'|\overline{U}$ coïncide avec $\overline{U}'$.

Pratiquement, on sera intéressé par le cas où $x \notin X-U$ et où x est adhérent à U, où $\overline{X}'$ est entier sur $\overline{X}$ et où $O_{\overline{X}} = p_*(O_{\overline{X}'})$, $p: \overline{X}' \to \overline{X}$ étant la projection canonique, - de sorte que G opère transitivement sur l'ensemble fibre $\overline{X}'_{\overline{x}}$. De plus, on sera sous des conditions où on peut construire canoniquement $\overline{X}'$ en termes de $\overline{U}'$; par exemple, si on suppose X normal en x, donc $\overline{X}$ normal, et $\overline{U}$ non vide, on définira $\overline{X}'$ comme le normalisé de $\overline{U}$ relativement à $\overline{U}'$ sur $\overline{U}$ (i.e. comme limite projective des normalisés dans les $U'(i)$ sur U, U' étant écrit comme limite projective de schémas principaux $U'(i)$ sur U de groupes quotients finis $G(i)$ de G).

Si maintenant ξ est un point de $\overline{X}'_{\overline{x}}$, on peut considérer le groupe de stabilité G_ξ de ξ, formé des $g \in G$ tels que $g\xi = \xi$; ce groupe prendra le nom de groupe d'inertie relatif à ξ. Dans le cas envisagé plus haut où les points de $\overline{X}'$ sur x sont tous conjugués sous G, on voit que pour ξ variable, les G_ξ parcourent une classe de sous-groupes conjugués de G, qu'on appelera (par abus de langage) les sous-groupes d'inertie relatifs à x. Noter qu'en toute rigueur cette classe de sous-groupes n'est pas déterminée par la seule connaissance de $x \in X$, mais dépend du choix du prolongement de $\overline{U}'$ en $\overline{X}'$. Lorsque X est normal en x et que x est spécialisation d'un point de U (ce qui signifie que x est adhérent à U si X est localement noethérien), il sera sous-entendu, sauf mention du contraire, que le choix en question est fait par normalisation, comme expliqué plus haut.

(9.14.1.5)

2. Supposons donné une situation (Y,V,H,V') analogue à (X,U,G,U'), et un morphisme $f: X \to Y$ tel que $f(U)\to f(V)$, un morphisme $f': U' \to V'$ compatible avec $U \to V$ induit par f, un morphisme de groupes $\phi:G \to H$ tel que ~~f(gx)~~ f' soit compatible avec les actions de G et H via ϕ,

Le cas le plus courant sera celui où on se donne un point géométrique a de U, d'où un point géométrique $b=f(a)$ de V, où U' et V' sont respectivement des quotients des revêtements universels de U et V basés en a et b, G et H étant respectivement des quotients de $\pi_1(U,a)$ et $\pi_1(V,b)$, l'homomorphisme $f': U' \to V'$ étant induit par les homomorphismes canoniques sur les revêtements universels en a resp. b, $\phi: G \to H$ étant induit par $f_*: \pi_1(U,a) \to \pi_1(V,b)$; de cette façon f' et ϕ sont déterminés sans ambiguité par f, et leur existence signifie simplement que $f_*: \pi_1(U,a)\to\pi_1(V,b)$ veut bien passer au quotient en un $\phi: G \to H$ (i.e. applique un certain sous-groupe dans un certain sous-groupe). Considérons d'autre part le localisé strict $\overline{Y}$ de Y en le point géométrique $f(\overline{x})$ de Y, d'où $\overline{V},\overline{V}'$ comme dessus; supposons donné un prolongement $\overline{Y}'$ de $\overline{V}'$ en un schéma à groupe d'opérateurs H sur $\overline{Y}$, et supposons donné enfin un homomorphisme $\overline{f'}: \overline{X'} \to \overline{Y'}$ qui prolonge l'homomorphisme $\overline{U'}\to\overline{V'}$ induit par f'. Pour tout point ξ de $\overline{X'}_{\overline{x}}$, $\overline{f'}(\xi)$ est alors un point de $\overline{Y'}_{\overline{y}}$, et on peut considérer le groupe d'inertie correspondant $H_{\overline{f'}(\xi)}$. On a alors la relation évidente

$$\phi(G_\xi) \subset H_{\overline{f'}(\xi)} \qquad (2.1)$$

Dans le cas où le groupe G resp. H opère transitivement sur $\overline{X'}_{\overline{x}}$ resp. $\overline{Y'}_{\overline{y'}}$, on peut donc dire que ϕ applique tout groupe ~~de la classe de conjugaison de sous-groupes~~ d'inertie de G rel. à x dans un groupe de ~~en la classe de conj. des sous-groupes~~ d'inertie de H rel à $y=f(x)$.

Il reste alors à expliciter l'homomorphisme $\overline{f'}: \overline{X'} \to \overline{Y'}$.

119

et $\overline{Y'}$ séparé sur $\overline{Y}$,

En pratique, il sera vrai que $\overline{U'}$ est schématiquement dense dans $\overline{X'}$, de sorte que $\overline{f'}$ sera déterminé de façon unique en termes des autres données, comme l'unique prolongement de $\overline{U'} \to \overline{V'}$ induit par f'; ce sera le cas en particulier dans le cas envisagé plus haut où $\overline{X'}$ se déduit de ~~Xt~~ $\overline{U'}$ par normalisation. Bien entendu, pour pouvoir conclure alors, que tout sous-groupe d'inertie de G rel. à x s'envoie dans un sous-groupe d'inertie de H rel. à y, il faudra avoir vérifié l'existence d'un prolongement $\overline{f'}$ de $\overline{U'} \to \overline{V'}$ (la commutation aux actions de G sera alors automatique). cela marchera, en interprétant f' comme $\overline{X'} \to \overline{Y'} \times_{\overline{Y}} \overline{X'}$, lorsque $\overline{Y'}$ est entier ~~[illegible]~~ sur $\overline{Y}$, cf. EGA II 6.1.14.

3\. Revenons à la situation de 1), supposons que $\underline{O}_{X,x}$ soit un anneau local régulier, et que $\overline{U}$ soit le complémentaire dans le schéma strictement local régulier $\overline{X}$ d'un diviseur $\overline{D}$ à croisements normaux. On est en particulier dans le cas favorable où la définition de $\overline{X'}$ est immédiate par normalisation. Supposons que la ramification de $\overline{U'}$ en les points maximaux de $\overline{D}$ soit modérée. On sait alors, par le calcul local bien connu, que pour tout $\xi \in \overline{X'_x}$, le groupe d'inertie correspondant G s'identifie canoniquement ~~aux groupe~~ à un groupe quotient du groupe

C = l'ensemble des composantes irréd. de $\overline{D}$

$$(3.1) \qquad I = \prod_{\ell \neq p} \underline{Z}_\ell(1)(k(\bar{x}))^C = \prod_{\ell \neq p} T_\ell(k(\bar{x}))^C ,$$

p étant la caractéristique résiduelle en x. De plus, ce même calcul local montre que le facteur de ce groupe d'inertie correspondant à la composante $\overline{D}_c$ ($c \in C$) du diviseur de ramification $\overline{D}$ coïncide aussi avec le groupe d'inertie relatif à n'importe quel point de $\overline{X'}$ au dessus du point maximal de $\overline{D}_c$ (ou de tout autre point de $\overline{D}_c$ qui n'appartient à aucune autre composante irréductible de $\overline{D}$) qui générise ξ ; comme il y a toujours de tels points, cela montre que la classe de conjugaison du facteur en question peut aussi s'interpréter comme la ~~xxxx~~ classe des groupes d'inertie en les points envisagés de $\overline{D}_c$; en particulier, cette classe de conjugaison ne dépend que de la composante irréductible de D = X-U ~~xximage~~ de point générique l'image du point générique de $\overline{D}_c$.

119

4\. Revenons à la situation de 2, et supposons que la structure de $(\overline{X},\overline{U})$ soit celle envisagée dans 3, et que de même $\overline{Y}$ soit un schéma local régulier et $\overline{V} = \overline{Y} - \operatorname{supp} \overline{E}$, $\overline{E}$ étant un diviseur à croisements normaux sur $\overline{Y}$. Soit C' l'ensemble des composantes irréductibles de $\overline{E}$, On voit alors que pour tout $c' \in C'$, l'image inverse de $\overline{E}_{c'}$ est un diviseur sur $\overline{X}$ dont le support est contenu dans celui de $\overline{D}$, donc est de la forme

$$\overline{f}(\overline{E}_{c'}) = \sum_c n_{c,c'} \overline{D}_c ,$$

où pour c' fixé, les $n_{c,c'}$ sont des entiers $\geqslant 0$ non tous nuls. Ces notations fixées, un calcul immédiat ~~dexrex~~ d'images inverses de revêtements kummériens montre que pour deux points correspondants ξ et η, ~~l'homomx~~ on a commutativité dans le diagramme

(4.1)
$$\begin{tikzcd} G_\xi \arrow[r, "\varphi"] & H_\eta \\ \prod_\ell' \underline{Z}_\ell(1)(\overline{x})^C \arrow[u] \arrow[r, "N"] & \prod_\ell' \underline{Z}_\ell(1)(\overline{y})^{C'} \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

les flèches ~~horizontales~~ verticales étant les épimorphismes canoniques, et N étant l'homomorphisme défini par la matrice $N = (n_{c,c'})_{(c,c') \in C \times C'}$, compte tenu que l'homomorphisme $k(\overline{y}) \to k(\overline{x})$ induit des isomorphismes

$$\underline{Z}_\ell(1)(\overline{y}) \simeq \underline{Z}_\ell(1)(\overline{x}) .$$

Pour que l'homomorphisme N soit un isomorphisme, il est donc nécessaire et suffisant que card C = card C' et que ~~detxN~~ l'entier ordinaire dét N soit égal à $\pm p^r$, où p est l'exposant caractéristique de k(x) et k(y); dans ce cas, on conclut donc que les sous-groupes d'inertie de H en y sont les conjugués des images des sous-groupes d'inertie de G en x.

5\. Supposons en particulier que l'on ait V = Y - supp E, E étant un diviseur $\geqslant 0$ sur Y, ~~tel que~~ $U = f^{-1}(V)$, et que ~~pour tout x f^{-1}(E), posant~~ les conditions suivantes soient satisfaites:

a) Pour $x \in f^{-1}(\operatorname{supp} E)$, $y = f(x)$, $\underline{O}_{X,x}$ et $\underline{O}_{Y,y}$ sont noethériens.

b) Le diviseur $D = f^*(E)$ est défini, c'est un sous-schéma régulier de

X ~~X~~ (donc X est régulier en les points de son support), (Condition de transversalité) ~~$U = f^{-1}(V) = X - \mathrm{supp}\, D$~~.

b) supp E est irréductible, et il est régulier en les points de f(supp D) = supp E $\cap$ f(X) (donc Y est régulier en ses points).

Alors pour tout $x \in$ supp D, les ~~images des~~ sous-groupes d'inertie de G en x sont comme images par $\phi : G \to H$ des sous-groupes de H qui sont des sous-groupes d'inertie de H relativement au point maximal de supp E. Par suite, pour toute représentation linéaire de G (dans un module M sur quelque anneau) ~~xxx~~ qui veut bien se factoriser par une représentation linéaire de H, les images dans Aut(M) des sous-groupes d'inertie ~~dans~~ de G relatifs aux divers points de supp D (ou encore, relatifs aux diverses composantes irréductibles de supp D, cela revient au même en vertu de 3)) sont conjugués dans Aut(M). Remords au n°3 4. On peut demander un résultat plus précis, en ~~Application~~ considérant pour tout ξ comme ci-dessus (au dessus d'un point géométrique $\bar{x}$ de supp D) l'homomorphisme correspondant $\underline{Z}_\ell(1)(\bar{x}) \to G$ dont l'image est le sous-groupe d'inertie correspondant, et en se demandant comment cet homomorphisme varie avec le choix de ξ et de $\bar{x}$. Pour ξ variable, la variation se fait évidemment modulo composition avec les automorphismes intérieurs de G, ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ donc pour $\bar{x}$ fixé, on trouve une classe de conjugaison d'homomorphismes

$$\underline{Z}_\ell(1)(\bar{x}) \longrightarrow G .$$

Étudions ~~pour~~ la variation de cet homomorphisme, pour $\bar{x}$ variable dans une composante D_i de l'ensemble des points réguliers de D à car. $\neq \ell$; d'après ce qu'on a vu au n°3, on passe d'un tel homomorphisme à un autre en composant avec un quelconque des isomorphismes $\underline{Z}_\ell(1)(\bar{x}) \longrightarrow \underline{Z}_\ell(1)(\bar{x}')$ associé à une classe de chemins de $\bar{x}$ à $\bar{x}'$. Si cet isomorphe ne dépend pas du choix de cette classe de chemins, i.e. si le ~~action du groupe fondamental~~ faisceau l-adique de Tate $\underline{Z}_\ell(1)$ sur $D(\ell)$ est trivial (ce qui se voit déjà sur la

121

restriction dudit faisceau au point générique de D_i, alors on peut identifier entre eux tous les groupes $\underline{Z}_\ell(1)(\bar{x})$ envisagés à un même groupe $\underline{Z}_\ell(1)(D_i)$ (qu'on peut interpréter comme groupe des sections de $\underline{Z}_\ell(1)$ sur D_i ou sur le point générique de D_i), et on trouve une classe de conjugaison bien déterminée d'homomorphismes $\underline{Z}_\ell(1)(D_i) \to G$. (On trouve un résultat analogue pour les homomorphismes de produits de groupes $\underline{Z}_\ell(1)$ envisagés dans le n°3). Bien entendu, si $\underline{Z}_\ell(1)$ est trivial sur l'ouvert X_ℓ des points de X de car. $\neq \ell$, et si ce dernier est connexe, on peut identifier les groupes $\underline{Z}_\ell(1)(D_i)$ au même groupe $\underline{Z}_\ell(1)(X_\ell)$, soit $\underline{Z}_\ell(1)$, et on trouve pour chaque i une classe de conjugaison d'homomorphismes $\underline{Z}_\ell(1) \to G$. En général, celles-ci peuvent être distinctes pour des i distincts, bien entendu. Mais relativement à un morphisme $f : X \to Y$ comme dans les n°2,4, la formation des classes de conjugaison d'homomorphismes ci-dessus a un caractère évident de fonctorialité (qu'il y aurait lieu d'énoncer de façon précise, dans le cadre général du n° 4).

Revenant alors aux conditions du présent n°5, on peut préciser de la façon suivante l'assertion faite sur les classes de conjugaison de sous-groupes d'inertie en des assertions sur les classes de conjugaisons d'homomorphismes de modules de Tate: supposons que Y_ℓ soit connexe et que $Z_\ell(1)$ soit trivial sur Y_ℓ, de sorte qu'on peut identifier $Z_\ell(1)(Y_\ell)$ et les divers $\underline{Z}_\ell(1)(D_i)$ à un même module (libre de rang 1) $\underline{Z}_\ell(1)$ sur $\underline{Z}_\ell$. Considérons alors les classes de conjugaison d'homomorphismes composés $\underline{Z}_\ell(1) \xrightarrow{\text{inertie en } D_i} G \xrightarrow{\phi} H$. Ces classes sont conjuguées entre elles.

122

"Vrai" groupe fondamental

[feuilles [illegible]]

123

X muni d'une action σ, d'où par μ, [illegible] universelle.

$\downarrow f$ G schéma en groupes fini et séparable [illegible] sur S

S [le cas important est celui où $G = S \times \Gamma$].

$F_G(T) =$ ens. des classes d'iso de [illegible]

fibrés principaux homogènes sur X_T, de groupe

$G_T \times_T X_T = (G \times_S X)_T$, munis d'une action

[illegible] σ_T', $\sigma_T'(X') \simeq G_T$.

N.B. [illegible] d'un tel Foncteur, [illegible] [illegible] [illegible] (bis)

[illegible]

[illegible] cas fini ?

Le foncteur $F_G(T)$ [illegible] (bis)

[illegible] sur S

[illegible] sur S, et

[illegible] S [illegible]

[illegible] le foncteur F_G [illegible]

[illegible] compatible [illegible]

[illegible]

[illegible]

G $H^1(X, G)$ G [illegible]

130

131

subset of $\underline{L}$ consisting of the maps rational over k. The correspondence $f \longrightarrow (f^j_{a_1,\dots,a_r})$ is linear and one-to-one between $\underline{L}$ and the set all families of elements in K with only a finite number of nonzero components; since $\underline{L}_k$ is mapped in this way on the set of all families with components in k, one sees that $\underline{L}_k$ is a k-structure on $\underline{L}$. Furthermore, for any field k', the set $\underline{L}_{k'}$ of the multilinear maps rational over k' is equal to $k' . \underline{L}_k$.

Let finally V and W be two vector spaces with respective k-structures V_k and W_k, and let f be a linear map from V to W rational over k. If a subspace S of V is rational over k, it is generated by $S \cap V_k$ and therefore f(S), being generated by $f(S \cap V_k) \subset W_k$, is rational over k. Let now T be a subspace of W rational over k; for a k-basis $\{c_a\}$ of K, any vector v in V is uniquely expressed as $\sum_a c_a . v_a$ for some v_a in V_k, and such a vector is in T if and only if $f(v_a)$ is in T for all a since $f(v) = \sum_a c_a . f(v_a)$; therefore $f^{-1}(T)$ is generated by $f^{-1}(T) \cap V_k$ and is rational over k.

From the previous results, we shall deduce that the linear map f is rational over k if and only if its graph Γ is a subspace of $V \times W$ rational over k (for the k-structure $V_k \times W_k$ on $V \times W$). Indeed, Γ is the image of the map $g : v \longrightarrow (v, f(v))$ of V into $V \times W$ and if f is rational over k, so is g and so is its image Γ. Conversely, assume Γ rational over k; there exists therefore a basis of Γ consisting of vectors of $V \times W$ rational over k; such a basis is of the form $\{(e_i, f(e_i))\}$ where e_i and $f(e_i)$ are rational over k for all i; but since the projection from Γ to V is an isomorphism of vector spaces, the e_i form a basis of V rational over k, and since the $f(e_i)$ are rational over k, so is f.

5. Conjugates.

Let V be a vector space with a k-structure V_k and let σ be a k-isomorphism from a field k' onto a field k''.

We shall study the behavior under σ of the vectors, the subspaces and the multilinear maps. To begin with, I contend that there exists a unique map $v \longrightarrow v^\sigma$ from $V_{k'}$ onto $V_{k''}$ such that:

(iii)

S préschéma loc. noeth.

F foncteur $(Sch)/_S \longrightarrow (Ens)$

(i) F compatible aux limites inductives d'anneaux

(ii) F compatible aux descentes fidèlement plates quasi-compactes et localisation

(iii) Si A anneau local noeth. complet sur S, corps résiduel k, alors $F(A) \xrightarrow{\sim} F(k)$,

(iv) F séparé.

(v) Pour tout k corps sur S, F(k) est fini, et si k' est une ext. alg. close de k, ~~[illegible]~~ alg. clos, $F(k) \to F(k')$ est bijectif.

Alors F représentable par un ~~schéma~~ étale ~~et quasi~~ séparé fini sur S.

~~Remarque~~

S-Var. S le spectre d'un anneau local complet à corps résiduel alg. clos A, ~~et pour~~ [illegible] [illegible], et [illegible] [illegible] sur $S_1 = S - y$, le ~~foncteur~~ F soit représentable par M_1. ~~[illegible]~~ Soient ξ_i ~~$(i \in I)$~~ (i∈I) [illegible] de F(k), ils proviennent d'éléments $\xi_i \in F(A)$ bien déterminés, [illegible], leurs restrictions $\xi'_i = \xi_i | S_1 \in F(S_1)$, ils correspondent à des

132

for $\alpha \neq o$ the form of the coefficient of c_α implies therefore $\eta_{ij\alpha} = 0$ for $i \in I'$ and $j \in I''$ since no nonzero linear combination of the e_j is in W. Therefore $\xi_{ij} = \eta_{ijo}$ is in k', and k' contains k(W). q. e. d.

When V is finite dimensional, it follows easily from the previous proof that k(W) is generated by the mutual ratios of the Plücker coordinates of W with respect to any given basis of V rational over k.

4. Rationality for linear and multilinear maps.

We shall investigate in this paragraph the question of rationality for the multilinear maps. Two particular cases are worth mentioning; the first concerns the linear maps, the second the multilinear and linear forms, that is the case of functions with values in K endowed with the k-structure defined by k.

Let V_i for $1 \leq i \leq r$ and W be vector spaces, each one endowed with a k-structure. A multilinear map f from $V_1 \times \ldots \times V_r$ to W is called rational over k if $f(v_1, \ldots, v_r)$ is rational over k when the v_i do. It is clear that any multilinear map obtained by composition of some multilinear maps rational over k is rational over k.

Let $\{e_\alpha^{(i)}\}$ be a basis of V_i rational over k (for $1 \leq i \leq r$); since any vector in V_i rational over k is a linear combination with coefficients in k of the basic elements, a multilinear function f as before is rational over k if and only if $f(e^{(1)}_{\alpha_1}, \ldots, e^{(r)}_{\alpha_r})$ is rational over k whatever be the indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; if $\{e'_j\}$ is a basis of W rational over k and if one puts

$$f(e^{(1)}_{\alpha_1}, \ldots, e^{(r)}_{\alpha_r}) = \sum_j f^j_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} \cdot e'_j \tag{4}$$

the function f is rational over k if and only if the components $f^j_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}$ are in k. From that follows two facts:

a. Let k' be a field. In order that f be rational over k', it is necessary and sufficient that k' contains the $f^j_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}$, that is the field k(f) generated over k by these elements; in fact, the basis previously introduced are rational over k, and a fortiori over k'.

b. Let us assume the spaces $V_1, \ldots, V_r$ to be finite dimensional. Let $\underline{L}$ be the space of all multilinear maps from $V_1 \times \ldots \times V_r$ to W, and $\underline{L}_k$ be the

133

Lemme Soit S un préschéma loc. noeth., et pour tout $s \in S$, soit $X(s)$ un préschéma quasi-fini étale séparé sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s)$, et pour $t \in S$, $s \in \bar{t}$, soit $\varphi_{st} : X(t) \to X(s)$ rendant

$$\begin{array}{ccc} X(s) & \longleftarrow & X(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_t) \end{array}$$

cartésien le diagramme [illegible]. Le système étant transitif dans $\varphi_{st}\varphi_{tu} = \varphi_{su}$. Alors il existe un préschéma quasi-fini séparé étale sur S, soit X, et des isomorphismes

$$\varphi_s : X \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s) \to X(s),$$

rendant commutatifs les diagrammes évidents. X est unique à isomorphisme unique près.

Ce dernier fait résulte d'un énoncé plus général sur les catégories de préschémas étales sur S, qui donne un foncteur pleinement fidèle. Je n'ai pas [illegible] de [illegible] lorsque S [illegible], donc noeth. Le [illegible] [illegible], on [illegible] l'énoncé [illegible] pour les [illegible]-préschémas [illegible] $S \neq S$.

134

$W \cap V_{k'} = k'.T$ by applying the result a. proved before to k' instead of k and the k'-subspace $k'.T$ of $V_{k'}$. Otherwise stated, W is rational over k' and $W \cap V_{k'} = k'.(W \cap V_k)$ in such a way that the two k'-structures one could get on W by extension of scalars and inducing are actually the same.

We shall now characterize the fields over which a given subspace is rational.

Proposition 1. Let V be a vector space with a k-structure. For any subspace W of V there exists a field $k(W)$ such that the relations "W is rational over k'" and "$k(W)$ is contained in k'" are equivalent for any field k'.

Let $\{e_i\}_{i \in I}$ be a basis of V rational over k; by standard results, there is a subset I'' of I such that the vectors e_j for j in I'' form a basis of V modulo W. This means that V is direct sum of W and the subspace V'' having $\{e_j\}_{j \in I''}$ as a basis; but V is direct sum of V'' and the subspace V' having as a basis the e_i for i in $I' = I - I''$. Therefore there exists a unique isomorphism f of V' with W such that $f(v') - v' \in V''$ for any v' in V'. If one puts $v_i = f(e_i)$ for $i \in I'$, the vectors v_i form a basis of W and they are of the following type

$$v_i = e_i - \sum_{j \in I''} \xi_{ij} . e_j \qquad (i \quad I') \tag{2}$$

for some scalars ξ_{ij} in K ($i \in I'$ and $j \in I''$). Moreover, no non zero linear combination of the e_j for $j \in I''$ is in W since $W \cap V'' = 0$.

Let $k(W)$ be the field generated over k by the ξ_{ij}. If a field k' contains $k(W)$, the vectors v_i are rational over k' and so does W. Conversely, suppose that W is rational over some field k'. Let $\{c_\alpha\}$ be a basis of K over k' such that $c_o = 1$ for some index $\alpha = o$; put $\xi_{ij} = \sum_\alpha \eta_{ij\alpha} . c_\alpha$ with some $\eta_{ij\alpha}$ in k'; one gets therefore:

$$v_i = c_o . (e_i - \sum_j \eta_{ijo} . e_j) + \sum_{\alpha \neq o} c_\alpha . (\sum_j \eta_{ij\alpha} . e_j) . \tag{3}$$

Since W is rational over k' and the v_i are in W, the considerations in a. above show that the coefficient of each c_α in v_i is in W and rational over k';

135

Soit S un schéma réduit connexe.

On considère des schémas en groupes, finis et plats sur S, soit G, pour lesquels il y a une suite exacte

$$e \to U \to G \to \Gamma \to e$$

où $U \to S$ est plat, fini, et géométriquement ~~[illegible]~~ radiciel, et où $\Gamma \to S$ est plat, fini, séparable. Alors le sous-S-groupe U de G est déterminé de façon unique [pour cette assertion, l'hypothèse "S réduit" est-elle nécessaire ?]. Les sous-groupes P [illegible] étude des fibrés principaux sous de tels S-groupes. On suppose S [illegible] sur k, et on considère les P avec structure [illegible].

S-Groupes admissibles (S réduit ?)

~~Proposition~~ ~~[illegible]~~ Soit $S' \to S$ un morphisme ~~[illegible]~~ plat, G un S-groupe fini. Si G ~~[illegible]~~ est admissible, $G_{S'}$ l'est aussi ; la réciproque est vraie si $S' \to S$ est fidèlement plat.

si et S réduits

Dire ce terme. Réciproque résultats de la théorie de 2 [illegible] et unicité.

136

<u>Corollaire</u> Supposons G admissible, et P un fibré principal sous G. Alors $\mathrm{Aut}(P)$, considéré comme S-groupe, est admissible.

<u>Proposition 2</u> Soit (P,ξ) un fibré principal pointé sous un S-groupe admissible G. Alors $\mathrm{Aut}(P,\xi)$ est réduit à l'identité.

Ce résulte, moyennant le corollaire précédent, ~~de~~

~~Lemme~~ <u>Proposition 3</u> Deux sections d'un P (principal sous G, ~~admissible sur~~ S connexe) qui sont égales en un point, sont identiques. [De façon plus précise, si s est une section de P/S, alors il existe un sous-préschéma ouvert et fermé Q de P, tel que $Q_{red} \to S$ soit un isom., et l'isomorphisme réciproque induit par s.]

Un (P,ξ) ~~est dit~~ (relatif à G admissible) est dit <u>minimal</u> si il ne provient pas d'un sous-groupe admissible G' de G, et (P',ξ') relatif à G', t.q. $(P,\xi) \simeq (P',\xi') \times_{G} G'$.

137

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

~~Proposition 4~~ Soit $\mathfrak{Z}^{1}(\mathfrak{a}; G)$ = ens. des classes d'isom. de G-fibrés principaux munis d'une paramétrisation en dessous de a. C'est un foncteur covariant en le S-groupe variable G.

Proposition 4 Si $\alpha \in \mathfrak{Z}^1(a, G)$ est minimal, alors $u \mapsto u_*(\alpha)$ de $\mathrm{Hom}^{gr.}_S(G, G')$ dans $\mathfrak{Z}(a, G')$ est injective.

Sous réserves ...

Soient en effet $u, v : G \to G'$ t.q. $u\alpha = v\alpha$. Soit (P,ξ) le dessous de α, (P',ξ') le dessous de $u\alpha = v\alpha$, $(u,v) : G \to G'\times G'$

$$\overbrace{(P,\xi) \times_G (G'\times G')}^{(Q,\eta)}$$

(paramétrisés sur S) d'où ; par hypothèse, il y a un morph. compatible avec les paramétrisations, et avec la diagonale $G' \to G'\times G'$) $(P',\xi') \to (P,\xi)\times_G(G'\times G')$, d'où un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (P,\xi) \longrightarrow (Q,\eta) & \text{au-dessus de} & G \xrightarrow{(u,v)} G'\times G' \\ \uparrow & & \uparrow \\ (P',\xi') & & G' \end{array}$$

138

Soit (R, λ) le produit fibré de
(P, ξ) et (P', ξ') sur (Q, η),

139

~~S~~ préschéma connexe réduit

$$\begin{tikzcd} \bar G \arrow[r, "(u,v)"] & \bar G' \times \bar G' \\ \bar H \arrow[u] \arrow[r] & \bar G' \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (P,\xi) \arrow[r] & (Q,\eta) = (P,\xi) \times^{G} \\ (R,\lambda) \arrow[u] \arrow[r] & (P',\xi') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

~~catégorie de groupes~~
~~$\mathcal{C}$ une catégorie auxiliaire~~
~~$\mathcal{U}$ sous-catégorie pleine de $Gr(\mathcal{C})$~~

$\mathcal{C}$ une catégorie de S-groupes finis et plats

$\mathcal{C}$ stable par produits, par noyaux de couples de morphismes, par images

Les $G \in \mathcal{C}$ sont admissibles.

Le ~~définit~~ type S-variétés par a,

Si $G \in \mathcal{C}$, on pose $\zeta(G) = \zeta(S, a; G) =$ classe de fibrés homog. principaux a-pointés de groupe G

Éléments minimaux de $\zeta(G)$.

Proposition 4 Soit $\alpha \in \zeta(G)$ minimal. Alors $u \mapsto u_*(\alpha)$, de $\mathrm{Hom}^{gr}_S(G,G')$ dans $\zeta(G')$ est injectif $[G, G' \in \mathcal{C}]$

$u, v \in \mathrm{Hom}^{gr}_S(G, G')$ tels que ~~$u_*(\alpha) = v_*(\alpha)$~~ $u_*(\alpha) = v_*(\alpha)$.

(P,ξ) de classe α, (P',ξ') de classe $u_*(\alpha) = v_*(\alpha)$,

$(u,v) : G \to G' \times G'$, et $(Q,\eta) = (P,\xi) \times^{G} (G' \times G') = [(P,\xi) \times^{G}_{u} G'] \times [(P,\xi) \times^{G}_{v} G']$

(décomposition unique),

Par hypothèse, on a un hom. $(P',\xi') \to (Q,\eta)$ compatible avec $G' \xrightarrow{diag} G' \times G'$, Soit (R,λ) le produit fibré de (P,ξ) et (P',ξ') sur (Q,η). Soit $H \subset G$ le noyau de ~~Soit Z un S-schéma,~~ $G \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} G'$, je dis que (R,λ) est un fibré principal homog. de groupe H [et de question minimale de (P,ξ)], vérifiant donc que $H = G$, d'où $u = v$]. En effet, il suffit de le montrer ~~localement~~ en faisant l'extension de base $(S_1, a_1) = (P,\xi) \to (S, a)$, ce qui amène à supposer

$S \leftarrow S_1$

$u(g) = g'$
$v(g) = g_1 g'$
$u(g) = g_1^{-1} v(g)$

140

la situation par G_1, G'_1, (P_1,ξ_1), (Q_1,η_1) etc

[Attention, on peut le faire parce que S_1 est [illegible] S_1, (muni du [illegible] ε_1)

l'étant plus]. P_1 s'identifie alors $G_1,\eta_1)$, Q_1 à

$G'_1 \times_{S_1} G'_1$ muni de $(\varepsilon'_1,\varepsilon'_1)$, ~~[illegible]~~ enfin

(P'_1,ξ'_1) s'identifie ainsi à (G'_1,ε'_1). Il suffit

de voir que $(P'_1,\xi'_1) \to (G'_1, D_1)$ est

l'application diagonale $G'_1 \to G'_1 \times_{S_1} G'_1$. Or

~~[illegible]~~ avec ces identifications, et désignant par

w l'isom. $(P,\xi)\times_u G' \to (P,\xi)\times_v G'$, w_1 l'isom

déduit par extension de la base à S_1,

notre assertion signifie que w_1 transforme

la section "naturelle" de $P_1 \times_{u_1} G'_1$ dans celle

de $P_1 \times_{v_1} G'_1$, i.e. que l'on a commutativité

dans

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & (P\times_u G')\times_S S_1 \arrow[r, "w_1 = w\times_S S_1"] & (P\times_v G')\times_S S_1 \end{tikzcd}$$

ce qui revient par [illegible] à la commutativité de

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{can}"'] & P\times_u G' \arrow[r, "w"] & P\times_v G' \end{tikzcd}$$

Or cela résulte de l'invariance de $P \to P\times_v G'$

111 transformant ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible]

~~Ceci prouve~~

D'autre part on a

$$\mathfrak{Z}(G\times G') = \mathfrak{Z}(G)\times\mathfrak{Z}(G')$$

et aussi sous les sous-groupes $\in \mathcal{C}$ d'un $G\in\mathcal{C}$ satisfont la condition minimale.

Ces propriétés formelles suffisent pour construire un pro-objet de $\mathcal{C}$, au moyen d'un système projectif d'épimorphismes, qu'on désignera par $\pi_1^{\mathcal{C}}(S,\xi)$.

Exemple I $\mathcal{C}$ = ensemble des groupes définis par des groupes finis ordinaires. Les notions de groupes fondamentaux.

Exemple II S est un préschéma au-dessus d'un corps k. $\mathcal{C}$ provient d'une catégorie $\mathcal{C}_0$ de k-groupes finis [illegible] exemple : les k-groupes finis — ou ceux [illegible] sur k (p. ex. dans) stable par produits, sous-groupes, images.