

Exercice 4.10.6 . Soient S un \underline{U} -site dont la topologie est moins fine que la canonique, \underline{M} une partie de $Fl(S)$ possédant les propriétés suivantes :

- a) Les morphismes de \underline{M} sont quarrables (I 10.3) et \underline{M} est stable par changement de base.
- b) \underline{M} contient les flèches identiques et est stable par composition .
- c) Une flèche $u : X \rightarrow Y$ telle qu'il existe une famille couvrante $Y_i \rightarrow Y$, avec les $X \times_Y Y_i \rightarrow Y_i$ dans \underline{M} , est elle-même dans \underline{M} .
- d) Pour tout objet X , toute famille couvrante de X est raffinée par une famille couvrante $(f_i : X_i \rightarrow X)$ où les f_i sont dans \underline{M} .

0
/le site

notons
Pour tout objet X , ~~soit $S(X)$ la sous-catégorie~~ $S(X)$ constitué par
("petit site de X ") ~~soit $S(X)$ la sous-catégorie~~ la sous-catégorie pleine de S/X formée des objets dont le morphisme structural est dans \underline{M} , munie de la topologie induite par celle de S (III 3.1).

1) Montrer que les familles couvrantes $(f_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ où les f_i sont dans \underline{M} forment une prétopologie sur S (II 1.3) qui engendre la topologie de S .

2) Pour toute flèche $u : X \rightarrow Y$ de S , montrer que le foncteur changement de base par u est un foncteur continu (III 1.1) de $S(Y)$ dans $S(X)$. On notera

$$S(u)^* : S(Y)^\vee \rightarrow S(X)^\vee$$

le foncteur correspondant entre les catégories de faisceaux (III 1.2, iv)).

3) Définir une équivalence entre le topos S^\vee et la catégorie des systèmes

$$(F_X) \quad (X \in \text{ob } S) , \quad (\varphi_u) \quad (u \in Fl S)$$

formés d'objets $F_X \in \text{ob } S(X)^\vee$, et pour toute flèche $u : X \rightarrow Y$ dans S , d'un morphisme $\varphi_u : S(u)^*(F_Y) \rightarrow F_X$, ces systèmes

9

étant soumis à une condition de transitivité pour un composé $v \circ u$ de flèches de S , et à la condition que $u \in M$ implique que φ_u soit un isomorphisme.

3) Définir des foncteurs "restrictions" et "prolongement"

$$\text{Res}_X : (S/X)^\vee \rightarrow S(X)^\vee, \quad \text{Prol}_X : S(X)^\vee \rightarrow (S/X)^\vee;$$

montrer que Res_X commute aux limites inductives et aux limites projectives et que Prol_X est pleinement fidèle, son image essentielle étant formée des faisceaux F tels que φ_u soit un isomorphisme pour toute flèche u de S/X .

4) Définir un isomorphisme d'adjonction faisant de Res_X l'adjoint à droite de Prol_X . En conclure qu'il existe un morphisme de topos

$$f : S(X)^\vee \rightarrow (S/X)^\vee$$

tel que $f^* = \text{Res}_X$ et que le foncteur f^* admet un adjoint à gauche $f_! = \text{Prol}_X$. Montrer que Prol_X transforme les faisceaux abéliens en faisceaux abéliens. Montrer que $f : S(X)^\vee \rightarrow (S/X)^\vee$ est un plongement de topos (9.1.1) et que par suite "le petit topos" $S(X)^\vee$ est ~~équivalent~~ équivalent à un sous-topos du "gros topos" $(S/X)^\vee = S^\vee/X$.

\int -(V 4.1)

5) Soit F un faisceau abélien flasque de S^\vee/X (V 4). Montrer que $\text{Res}_X F$ est $S(X)$ -acyclique. En déduire que pour tout faisceau abélien F de S^\vee/X et tout entier q , le groupe $H^q(X, F)$ (cohomologie calculée dans S^\vee/X) est canoniquement isomorphe au groupe $H^q(X, \text{Res}_X F)$ (cohomologie calculée dans $S(X)^\vee$).

6) Dédire de 5) que pour tout faisceau abélien G ~~sur~~ de $S(X)^\vee$ et tout entier q le groupe $H^q(X, G)$ ~~(calculée)~~ (cohomologie calculée dans $S(X)^\vee$) est canoniquement isomorphe aux groupes $H^q(X, f_* G)$ et $H^q(X, \text{Prol}_X G)$ (cohomologie calculée dans S^\vee/X).

10

Exercice 4.10.7 . On reprend les hypothèses et les notations de l'exercice 4.10.6 . On suppose de plus que \underline{M} possède la propriété suivante :

(Et) Pour tout couple de flèches composables u et v de $\text{Fl } S$, les propriétés $u \cdot v \in \underline{M}$ et $u \in \underline{M}$ impliquent $v \in \underline{M}$.

1) Montrer que pour toute flèche $u : X \rightarrow Y$, le foncteur de changement de base par u est un morphisme ~~auxiliaire~~ $S(u)$ du site $S(X)$ dans le site $S(Y)$. En d'autres termes , montrer que $S(u)^* : S(Y) \rightarrow S(X)$ est exact à gauche .

2) Montrer que $\text{Prol}_X : S(X)^\vee \rightarrow (S/X)^\vee$ est exact à gauche .

En déduire qu'il existe un morphisme de topos

$$g : S^\sim/X \rightarrow S(X)^\vee$$

tel que $g^* = \text{Prol}_X$ et $g_* = \text{Res}_X$. Montrer que g est une rétraction du plongement f i.e qu'on a $g \circ f \simeq \text{id}_{S(X)}$ et qu'on a un morphisme "d'adjonction" (entre morphismes de topos) $\text{id}_{S^\sim/X} \rightarrow f \circ g$.

3) Montrer que les conclusions de 1) et 2) ne sont plus

valables lorsqu'on ne fait pas l'hypothèse (Et) . (Prendre pour S la catégorie des schémas munie de la topologie f.p.p.f. (fidèlement plate et de présentation finie [S.G.A. 3 IV]) et pour \underline{M} les morphismes ~~fidèlement~~ plats et de présentation finie) .

4) Acheter une médaille en chocolat pour les rédacteurs .

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

Continuation de SGA \leftarrow IV 4.10.6 (3° et 4°) : plique \circ
 $(S_x \subset S_x)$

5°) soit $S_0 \rightarrow S$ un faisceau ~~(S_0 et (\mathcal{O}_S))~~

et supposons que S est un \mathbb{A}^1 -fibré sur S

et $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S$ les conditions suivantes :

(i) si $u: X \rightarrow Y$ avec $u \in M$, $Y \in \text{ob } S_0$, dans $X \in \text{ob } S_0$

[(ii) $\forall X \in \text{ob } S_0$ existe une famille commutative $X \rightarrow X$,
~~elle prouve~~ la suite de S engendré par
 les objets de S_0 est commutative, i.e. $\forall X \in \text{ob } S_0$,
 existe une famille commutative $X \rightarrow X$, avec
 $X_i \rightarrow Z_i \in \text{ob } S_0$.]

Montrons S_0 de la tr. induite. Prenons que

une famille de morphismes $X \rightarrow X$ dans

S_0 est commutative dans S_0 et elle l'est

dans S_0 et $S_0 \rightarrow S$ est continu.

Soit M_0 l'un des $u \in M$, $u: X \rightarrow Y$ avec

$Y \in \text{ob } S_0$, dans $X \in \text{ob } S_0$. Prenons que

$M_0 \in \text{Tr}(S_0)$ vérifie les conditions a) b) c) d)

de 1°).

Procédons comme dans 3°, définissons

faisceaux

Res: $S^{\sim} \rightarrow S_0^{\sim}$

Prol: $S_0^{\sim} \rightarrow S_0^{\sim}$

les morphismes Res commutent

l'inclusion et présentation, et Prol est

exact: g. et pl. fidèle, et image

essentielle

SGA 4 VI

Sommaire

1. Conditions de finitude pour les objets et flèches d'un topos. - 1 à 19
 2. Conditions de finitude pour un topos. - 20 à 37
 3. Conditions de finitude pour un morphisme de topos. - 38 à 46
 4. ~~Conditions de finitude pour un morphisme de topos.~~ ^{obtenues par recollage} 47 à 65

5. Catégories fibrées et Lim (rappels).

6. Sites et topos fibrés.

7. Limites projectives de topos.

8. Cas des limites projectives filtrantes de topos cohérents par morphismes de transition cohérents: théorèmes de passage à la limite pour la cohomologie.

9. Cohomologie d'une limite inductive de faisceaux sur un topos cohérent

10. Appendice (par P. Deligne). ~~Existence de points de topos cohérents.~~
 NB Bien sûr 8 serait interchangeable avec le bloc 7 à 9. Mais il me semble plus naturel de mettre dans deux numéros consécutifs les deux facettes du passage à la limite en cohomologie. Bien sûr, le numéro 8 sera réduit à une ou deux pages, le sort des conditions de finitude étant déjà fait.

Le n° 4 contiendra le sort des groupes constructibles (au sens groupes finis ou non), des faisceaux de torsion, des notions de constructibilité pour les Modules et complexes de Modules, - y compris les faits spéciaux dans le cas localement noethérien. Je pense que je le rédigerai mais ne le garantis pas. On peut ~~axiomatiser~~ laisser tomber le n°4, ce sera alors moins beau bien sûr ...:

La rédaction qui suit des n°s 1 à 3 est à complète, à cela près que je compte y ajouter encore quelques exemples (en particulier un topos localement algébrique non algébrique), un morphisme non cohérent de topos cohérents).

et un topos ayant une famille finie de topos cohérents, qui n'est pas localement algébrique

17

SCA 4 XVII

1.75 l. -4

6.90 l. 2

ref ? à V covats?

ref : dl. pour Ensembles finis resp. faisceaux

(Consultes Verdier) en groupes ??

1.139 l. -10

ref : VII B

1.167 l. -8

170 l. 7

175 l. -1

ref : SGA II 2^e édition (Lecture Notes)

ref : IV - W. Deligne -

18

SCA 4 Fasc. 1

Topologie générale

Fasc. 2

Fasc. 3

Théorie de la base et de la dualité globale

Exp. I: IV

Exp. V, VI, VII, VIII, IX, X, XI

Table des articles
général des leçons
Table des articles
des volumes
indexable # 570 r.

V	100
VI	150
VI _B	30
VII	24
VII _B	45
IX	55
	42
X	21
XI	19
<hr/>	
	432

Cat. dev. ? 40

XII	57
XIII	15
XIV	74
XV	38
XVI	44
XVII	210
XVIII	200
XIX	51
<hr/>	
#	640

178

5

19

Il faut ~~insérer~~ insérer le texte un ou deux fois
 une fois §3 bis, dans laquelle il
 faut du reporter le texte des lignes 7
 : 18 du document §4

me montre la suite faite

p.85 l.13 kg^+ kg^+
 l.23 kg^+ kg^+
 l.39 kg^+
 l.27 et suite :

210
~~476~~
 250
536

Le texte oublié a été reporté ici
par erreur !!!

Fare.

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

SEA 4 VI

Introduction: digite un post-it "sans doute
ici on fait que des cas. d'un point
et un autre."}

§4 charge E/φ ou φ/E

§3 (?) Charges l'exercice sur les deux faces.

§4 Surfaces rif au cas $u=0$ (charge
uniquement dans l'exercice de IV 9.1 ?)

§1 1.25... selon le cas $u=0$
Règles "I" ou "II" ~~en fonction~~
de la "charge" ou "I" ou "II" faces

§5 Exercice: Liouville (comme
travaux)

SCAA II2

(de C (IV 7.5b))

Exercice 2. . Soit C une ~~catégorie~~ ^{petite} catégorie, C' une enveloppe de Karoubi, Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) La catégorie $\text{Ind}(C)$ (I 8.2) est un \underline{U} -topos.

(bis) Le foncteur canonique $\text{Ind}(C) \rightarrow \hat{C}$ admet un adjoint à droite qui ~~est exact~~ est exact à gauche.

(i ter) Il existe une topologie sur C pour laquelle les faisceaux soient les préfaisceaux ind-représentables.

(ii) Dans C' , les limites inductives finies sont représentables, ~~il existe sur C' une topologie~~ dont les familles $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ sont celles qui sont raffinées par une famille épimorphique finie

(ii) ~~Dans C'~~ il existe une topologie sur C' dont les familles couvrantes sont celles qui sont raffinées par une famille épimorphique (ou encore, épimorphique effective universelle ..) finie, dans C' les limites ~~projectives~~ ^{inductives} finies sont représentables, et le foncteur canonique $C \rightarrow \tilde{C}$ ~~est~~ y commute.

(iii) (Si dans C les limites projectives finies sont représentables, ~~il~~ de sorte qu'on peut prendre $C'=C$.) Dans C les limites inductives finies sont représentables, et C satisfait la condition ST) de I 8.8 f).

(iv) Il existe un topos E engendré par sa sous-catégorie pleine E_{PF} (), et une équivalence de catégories $C' \simeq E_{PF}$.

De plus, ~~la topologie~~ si ces conditions sont satisfaites, la topologie postulée dans (i ter) est nécessairement celle décrite dans (ii), et le topos E postulé dans (iv) est nécessairement équivalent à $\text{Ind}(C)$. Ce topos est donc parfait si et seulement si ^{dans} C' ~~est~~ les limites projectives finies sont représentables.

22

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

SGA 4 VII b. 20 ^(ref) algébrique d. fortin: ^(ref)
 Ayant s.6. \tilde{X}_{et} ^(ref) localement cohérent. Il est cohérent ^(ref)
 Conv. \tilde{X}_{et} ^(ref) ~~est~~ \tilde{X}_{et} est
 cohérent i.e. \tilde{X}_{et} \tilde{X}_{et} (conv. \tilde{X}_{et} -
 \tilde{X}_{et}). \tilde{X}_{et}
 (b) soit \tilde{X}_{et} système projectif fini d'un \tilde{X}_{et}
 un de dimension finie, $X = \varinjlim X_i$ (EGA IV 8)
 Alors $\tilde{X}_{et} = \varinjlim X_i$. Conv. s.6.1. $X' \in \mathcal{B}(\tilde{X}_{et})$
 En dimension bornée s.7. \tilde{X}_{et} \tilde{X}_{et} \tilde{X}_{et} \tilde{X}_{et}

SGA 4 IX b. 42 note bornée p. 8

VII 2.1 c) (p. 9) conv. \tilde{X}_{et}

SCA 4 II p. 42

non prouvé en même temps que \tilde{X} satisfait aux conditions équivalentes de VI 1.25.

(*) (Note pour la page 8.) Prouvons que la notion de constructibilité 2.3 pour un faisceau d'ensembles F coïncide avec celle de VI 1.9.3. La question étant locale sur X , on peut supposer X affine dans "cohérent", i.e. $\tilde{X} = \text{Spec } A$. Soit C la catégorie des F -constructibles au sens de 2.3, et C' la catégorie des objets cohérents de \tilde{X} (VII 5.6). En vertu de VII 5.6, l'objet final X de \tilde{X} est cohérent, donc C' est formé des objets cohérents de \tilde{X} (2.5). En vertu de VI 1.24, et compte tenu du fait que C est génératrice dans \tilde{X} (2.7.2) et stable par limites inductives finies (2.7.4), il suffit de prouver que $C \subset C'$. Mais il résulte de 2.7 que tout F -obj C est quasi-compact, puisque un schéma X qui est quasi-compact et quasi-séparé est quasi-compact. Soit C un objet de \tilde{X} (VII 5.6.1). Soit $F \rightarrow F'$ un morphisme de faisceaux. Comme C est stable par limites projectives finies (2.6 (i)), l'inclusion $C \subset C'$ dans un cas particulier de 2.1. En vertu de VI 2.9. b), il suffit de voir que C est stable par limites inductives finies et limites projectives finies, qu'elle est génératrice et formée d'objets quasi-compact. Compte tenu de 2.6 (ii) et (2.7.1), il reste à prouver que tout F -obj C est quasi-compact. Or, en vertu de 2.7, C est un objet quasi-compact de \tilde{X} (VII 5.6.1), et quasi-séparé et un épimorphisme $G \rightarrow F$. Or G est un objet quasi-compact de \tilde{X} (VI 1.3), qfd.

Bien entendu, il y aurait lieu de renvoyer les §§ 1, 2 du présent exposé, en les rattachant aux notions générales de l'exposé précédent de VI. Nous laissons ce soin à la rédaction aux séminaires futures.

à voir pour l'exposé

EGA 4 IV } Modules plats sur anneaux locaux noethériens locaux? mit?
 SGA 4 XVII 4.23 attention voir à II 3.7 (changé?)

XVII Théorie de rigidité pour faisceaux
 d'anneaux de formes quelconques.

Préface à 2ème édition.

Signatures autres contributions
 de Deligne

Intégration des formes
 Trace des formes
 sous conditions inhabituelles

Qu'en faire avec C.D. de Verdier: inclure?

SGA 4 IV Exercices à ajouter: § 8

types locaux
 types pseudo-riemanniens
 types $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ admissibles

sections e, e' de B déduites respectivement de E/P et E/Q , on note de B . Pour prouver l'égalité ~~annoncée~~ ~~annoncée~~ des deux qu'on appellera par abus de langage la section unité (ou section neutre)

(2.2.3)

~~$e \in \Gamma(B)$~~ , section unité $1_{P \times Q}$ de $P \times Q$, et définissent une même section $P \times Q$ par $e_{E/Q}$. De plus, ces deux trivialisations coïncident au dessus de la canoniquement trivialisé au dessus de $1_{P \times Q}$ par $e_{E/P}$, et au dessus de En particulier, le torsion E au dessus de $P \times Q$ (de groupe $G_{P \times Q}$) est

(2.2.2)

$e_{E/Q} \in \Gamma(B/Q) = \text{Hom}_Q(Q, E)$. et de façon symétrique la section unité de B , considéré comme extension comme extension de Q par G_P , $e_{E/P} \in \Gamma(E/P) = \text{Hom}_P(P, E)$,

(2.2.1)

comme extension de Q par G_P , Il y a lieu de considérer la section unité de B , considéré section unité.

2.2.

pour x, y, z, t respectivement dans $E_{P, q}, (S), E_{P, q}, (S), E_{P, q}, (S), E_{P, q}, (S)$.

(2.1.1.2)

relation $\phi(\lambda(x, y), \lambda(z, t)) = \lambda(\phi(x, z), \phi(y, t))$ et la commutativité de ces lois de composition partielles, et par la et des relations analogues en λ , s'expriment alors par l'associativité

(2.1.1.1)

~~$\phi(gx, y) = \phi(x, gy) = g\phi(x, y)$~~ en plus des associativités du type

(où $j: E \rightarrow P \times Q$ est le morphisme structural du torsion). Les axiomes, ~~$\text{pr}_2^j(x) = \text{pr}_2^j(y)$~~ , la deuxième lorsque $\text{pr}_1^j(x) = \text{pr}_1^j(y)$ ~~non~~

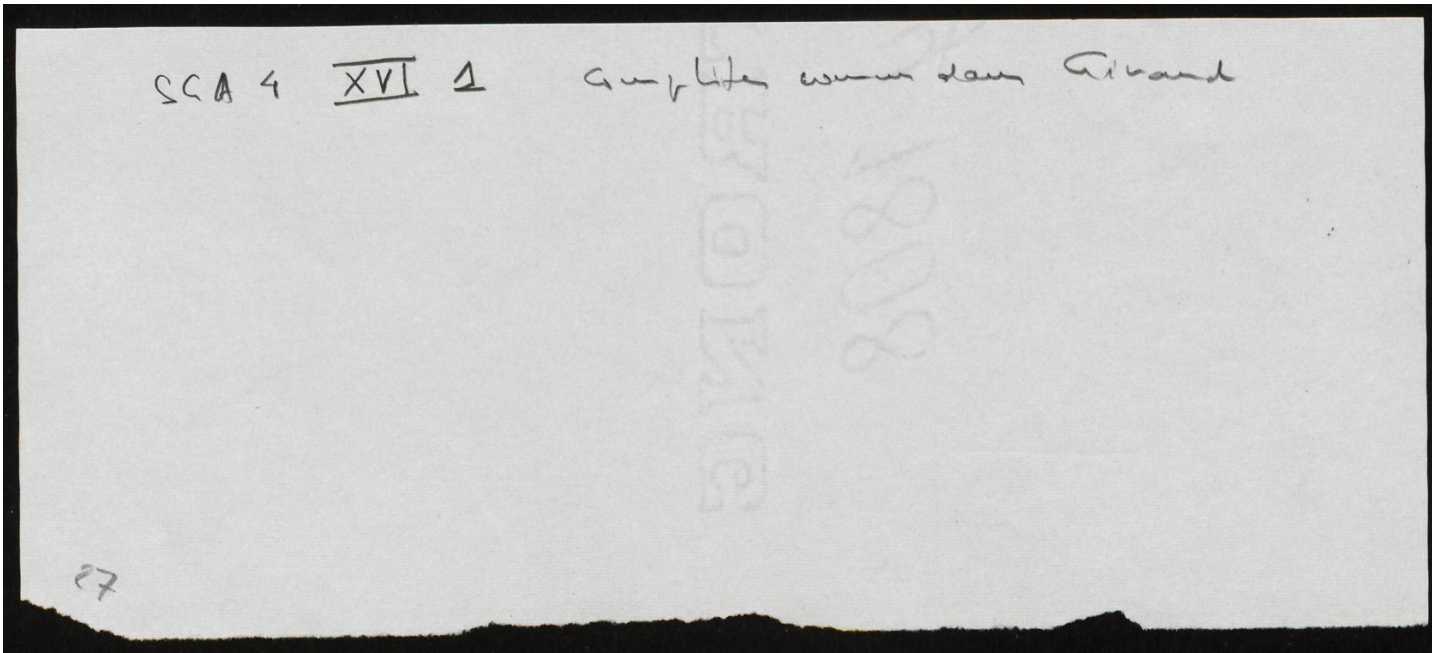
définies $\phi(x, y)$ et $\lambda(x, y)$ sur E , la première étant définie lorsque $G_{P \times Q}$ -torsion E est définie par deux lois de composition non partout

2.1.1.

On peut dire encore qu'une structure de bixtension sur le

5

19



SGA 4 XVI

VII 2

Du point de vue substance, 2.1.1 se ramène trivialement au cas où dans $X \rightarrow S$, X est affine, donc quasi-compact quasi-séparé (on dit maintenant "cohérent"), et alors c'est une conséquence du th. de changement de base par f , qui est donné dans SGA 4 XVI 1.1. Mais dans loc. cit. on utilise toute la force du théorème de changement de base propre, ce qui est en effet abusif, car en interprétant comme un énoncé d'acyclicité globale 2.1.1, on est ramené comme tu l'observes ~~à 2.1.5~~ au cas particulier 2.1.5, qui se ramène trivialement à son tour au cas du degré de transcendance 1, et par là au th. de changement de base pour le H^1 premier à p pour une courbe propre et lisse. Je pense présenter les choses ainsi en réédition de SGA 4, de sorte que ton 2.1.1 y sera énoncé en toutes lettres, s'il ne l'est déjà (je n'ai pas les textes en main). Cela te dispensera donc de le prouver, ta seule tâche consistant à interpréter en termes de champs cet énoncé ~~(que tu pourrais donner sous forme de rappels)~~.

Du point de vue rédaction, on a l'impression que tu t'es ingénié à tout présenter à l'envers. Il faut en tous cas bloquer ensemble 2.1.1 et 2.1.7 (pratiquement identiques) et 2.1.5 (celui-ci en corollaire, peut-être) ~~ce sera dans les rappels~~ Avant même de donner ces énoncés, il faudra avoir rappelé les définitions, pour que ça ait un sens. Au lieu de pro-lisse resp. lisse, il suffit de supposer tout localement L -¹⁻asphérique ("par exemple ..."). D'autre part, ~~les~~ énoncés 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.7.1 n'ont rien à voir avec les schémas, il sont manifestement importants en eux-mêmes et devraient passer dans un numéro à part dans ~~IV 5~~ ^{ou V} (avec un peu d'ordre dans la suite des énoncés). Enfin ~~les compléments schématiques~~

à insérer
dans le
chap. 4
ou
dans
29

Théorème 2.1.1. Soit $f: S' \rightarrow S$ un morphisme universellement localement L - l -asphérique (SGA 4 XV 1.1), par exemple (SGA 4 XV 2.1) un morphisme lisse, ou tel que S' soit isomorphe à la limite ^{projective} d'un système projectif filtrant de S -schémas lisses S'_i à morphismes de transition affines (SGA 4 XV 1.3) ⁽ⁱⁱ⁾
 Soit $g: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas, d'où un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f'} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ S & \xleftarrow{f} & S' \end{array},$$

G un ind-L-champ sur X dont les fibres sont des schémas ind-L-schémas $G' = f'^*(G)$ le champ image inverse sur X' .

a) Si f est un morphisme local de schémas strictement locaux, alors le foncteur

$$G(X) \longrightarrow G'(X')$$

est une équivalence de catégories.

b) Si g est cohérent (i.e. quasi-compact et quasi-séparé) alors le morphisme de champs "de changement de base"

$$f_*(g_*(G)) \longrightarrow g'_*(f'^*(G))$$

est une équivalence de champs sur S' .

Corollaire 2.1.2. Soient k un corps séparablement clos, k' une extension séparablement close de k , X un k -schéma, $X' = X \otimes_k k'$, alors pour tout ind-L-champ G sur X , désignant par G' son image inverse sur X' , le foncteur

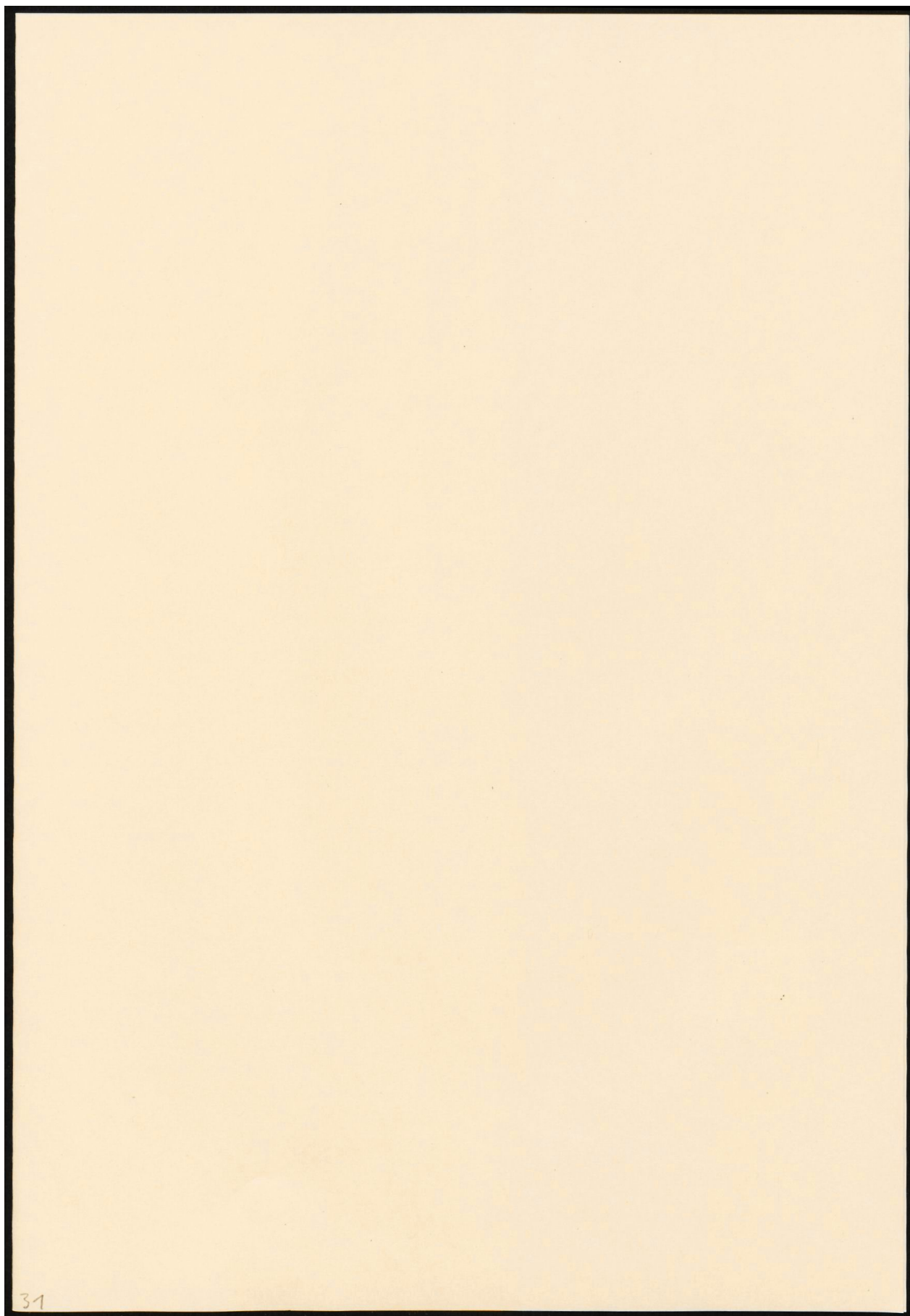
$$G(X) \longrightarrow G'(X')$$

est une équivalence de catégories.

On sait en effet (SGA 4 XVI) que $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$ est universellement localement L - l -asphérique.

Démonstration. On prouve a) par référence à SGA 4 XVI (nouvelle édition!) ^{de G} et b) en se ramenant à a) par des lemmes 2.1.7.2 et 2.1.7.4 renumérotés. *En tout, ça devrait faire 3 pages au Chap VII au maximum, - mais il y a des corrections au Chap VII.*

30.



31

Introduction voir Bibliographie mon. de
Montpellier de C.T.

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

Arks SCA 4

ref x [1]

x p.7 Début de phrase manuscrite

XII complètes ref: Girard

S.10. Complètes manuscrites par ref.
aux travaux récents d'Artis

IX p.39 ref H. de Tsen

XIII ~~part~~ 3.1. Sur un X manuscrite
(man, v.13 l.1-2 par de la)

XIX p.39, 10

p.7 ~~10~~, 10, 55, 39, 43

exp XIII 3.1: You wrote that proof, so if you think one needs the noetherian assumption, I agree.

exp XIX: I can't re-think this expose so quickly. Anyway, I agree to change μ_n to $\mu_n(A)$ and with your sugg. for p 7 line 2. I think that p.18, line -4 should be left however. The case $q=0$ needs special treatment, I think. I will have to think over the rest more carefully.

reference [1] for expose X :

[1] J. Ax , Some conjectures of Serre on cohomological dimension,
Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) 1214-1221 .

exp X p. 7 here is what is to be added:

Le corps résiduel de R' est k puisque nous avons supposé
 \bar{G} un ℓ -groupes, donc que les racines ℓ -ièmes de 1 sont
dans K . On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H' & \hookrightarrow & G' & \rightarrow & \bar{G} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H & \hookrightarrow & G & \rightarrow & \bar{G} \end{array} ,$$

exp XII, 5.10: A reference for my paper on alg. approx is

M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete
local rings, (à paraître).

(The explicit result is Theorem (3.1)).

exp IX p.34 here are some references:

A. Douady, Cohomologie des groupes compacts totalement
discontinus, Séminaire Bourbaki, exposé 189, (théorème 4.3)

S. Lang, Rapport sur la cohomologies des groupes, Benjamin 1966.
(théorème 12, p.207).

Ch.C. Tsen, Divisionsalgebren über Funktionenkörper, Nachr.
Ges. Wiss. Göttingen (1933) 335-339 .

Exposés XI à XIV sont tapés
 avec des corrections bien gros
 que le vent des semaines.

Vides romains (des exposés XVI,
XIX ...)

VI

v. 49, v. 50
 v. 52

vidéos et un vide !
 vide fortuite

VIII

généralités sur fonctions fibres :
 renvoyer : ~~III~~ IV ...

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

SGA 4 XVIII
(Deligne)

Références pour SGA 5 VII

} Dem de 3.5.3.
1.1 b)

V direz quelques mots sur relations
avec \lim et \lim^p :

- a) Sur un type de \mathcal{C} pour $\hat{\mathcal{C}}$,
les foncteurs H^n sur le $\lim^p \mathcal{C}$
- b) Il \Rightarrow . plus une telle interpré-
tation pour un type générique,
pursifier \Rightarrow obligé de prendre

$$H^n(\tilde{E}, F) \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{U} \in \mathcal{R}}} \lim_{\leftarrow} \mathcal{U} \quad \left. \begin{array}{l} F/\mathcal{O}_{\mathcal{C}} \\ \text{si sa} \\ \text{variable} \dots \end{array} \right\}$$

\mathcal{U} cible variable

$\mathcal{G}_n =$ un sous-ensemble de l'objet final
de $\hat{\mathcal{C}}$ par les objets de \mathcal{C}

X.Y

SCA 9 VIII

10. Compléments: espaces algébriques et étendues algébriques.

Nous donnons sous forme d'exercices quelques compléments, qui ne seront pas utilisés dans la suite du Séminaire.

10.1. Soit (X, \mathcal{O}_X) un schéma, ~~notons par~~ posons $X_{\text{ét}} = \text{Top}(X)$, de sorte que $(X_{\text{ét}}^{\sim}, \mathcal{O}_X)$ est un topos annelé. Montrer qu'on peut reconstruire le schéma X à isomorphisme unique près, quand on connaît le topos annelé $(X_{\text{ét}}^{\sim}, \mathcal{O}_X)$ à équivalence près. (Utiliser 6.1 pour reconstituer ~~Top(X)~~ le topos $\text{Top}(X) = \text{Ouv}(X_{\text{ét}}^{\sim})^{\sim}$, puis utiliser IV 4.2.3.) Plus précisément, montrer que si X, X' sont deux schémas, alors l'application naturelle

$$\text{Hom}(X, X') \longrightarrow \text{Homtoplocan}(X_{\text{ét}}^{\sim}, X'_{\text{ét}}^{\sim})$$

X (notations de IV 11.) induit une équivalence entre la catégorie discrète définie par l'ensemble $\text{Hom}(X, X')$ et la catégorie $\text{Homtoplocan}(X_{\text{ét}}^{\sim}, X'_{\text{ét}}^{\sim})$ (où pour simplifier on désigne par $X_{\text{ét}}^{\sim}$ le topos étale de X considéré comme topos annelé). (Utiliser IV 4.2.3.)

X 10.2. Soit (E, \mathcal{O}_E) un topos annelé. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes (comparer IV 9.):

(i) Il existe une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de E couvrant l'objet final, et une famille $(X'_i)_{i \in I}$ de schémas, tels que pour tout $i \in I$, le topos annelé induit E/X_i soit équivalent à X'_i ét.

(ii) Comme (i), avec I réduit à un élément.

(iii) Il existe un schéma X_0 , et une prérelation d'équivalence X_1 dans X_0 au sens de la catégorie (Sch) des schémas, telle que R soit étale i.e. le morphisme $p_1: X_1 \rightarrow X_0$ est étale, et que le topos annelé (E, \mathcal{O}_E) soit équivalent au topos annelé déduit par recollement du diagramme $\begin{matrix} X_2 & \rightrightarrows & X_1 & \rightrightarrows & X_0 \end{matrix}$ (de topos annelés) *associé au diagramme de schémas*

$$X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0$$

où $X_2 = (X_1, p_2)_{X_0} (X_1, p_1)$ (cf. IV 9 pour le procédé de recollement de topos par données de descente).

Lorsque les conditions précédentes sont satisfaites, on dira que le topos annelé (E, \underline{O}_E) est une étendue algébrique (comparer avec la notion d'étendue topologique IV 9.).

10.3. Montrer qu'une étendue algébrique a suffisamment de points.

Une étendue algébrique est localement annelée (IV 11.), et si E, E' sont deux étendues algébriques, la catégorie Homtoplocan (E, E') (IV 11.) est un groupoïde (toute flèche est inversible). (Procéder pour le premier point comme dans IV 9. ; pour le deuxième, utiliser IV .)

(Comparez IV 9.)
 10.4. Soit E une étendue algébrique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Pour toute étendue algébrique E' , la catégorie Homtoplocan (E', E) est rigide, i.e. ~~strict~~ (comme c'est un groupoïde) elle est équivalente à une catégorie discrète.

(ii) Même énoncé, E' étant le topos ponctuel annelé par un corps algébriquement clos. En d'autres termes, pour tout point géométrique

(IV 11.) de E , le groupe des automorphismes de p est le groupe unité.

(iii) (Lorsque E est exprimé en termes d'une prérelation d'équivalence étale $(X_1$ dans un schéma X_0 , comme dans 10.2 (iii).) La prérelation d'équivalence (X_1, p_1, p_2) dans le schéma X_0 est une relation d'équivalence, i.e. le morphisme $(p_1, p_2): X_1 \rightarrow X_0 \times_{X_0} X_1$ est un monomorphisme.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que l'étendue algébrique E est rigide, ou encore que E est un espace algébrique (*)

10.5.

39 (*) La terminologie est due à M. MARTIN, qui a mis en évidence l'importance de cette notion en Géométrie Algébrique.

Terminologie, notations SGA 4 Vol. 2
 Attention, faire deux listes disjointes!

(Sch) VII 1.1

$\text{Et}/X, X_{\text{ét}}$ VII 1.2

Topologie étalé (sur (Sch), sur un schéma) étale topology (on (Sch),
 (on a scheme) VII 1.2

site étale d'un schéma étale site of a scheme VII 1.2

topos étale d'un schéma étale topos of a scheme VII 1.2

$f_{\text{ét}}$ VII 1.4

point géométrique d'un schéma geometric point of a scheme VIII 3.1.

foncteur fibre (relatif à un point géométrique d'un schéma)
 fiber functor (corresponding to a geometric point of a scheme) VIII 3.3

F_{ξ} VIII 3.3

hensélien (anneau local -) henselian local ring VIII 4.1

~~Fléture~~ hensélisation d'un anneau local henselization of a local ring
 VIII 4.1

strictement local (anneau) strictly local ring VIII 4.2

id (schéma) strictly local scheme VIII 4.2

anneau strictement local (d'un schéma en un point géométrique)

strictly local ring (of a scheme at a geometric point) VIII 4.3

hensélisé strict d'un anneau local strict henselization of a local ring
 VIII 4.4

localisé strict d'un schéma en un point géométrique strict localization
 of a scheme at a geometric point VIII 4.3

flèche de spécialisation specialization ~~map~~ ^{arrow} VIII 7.2

spécialisation d'un point géométrique specialization of a geometric point VIII 7.2

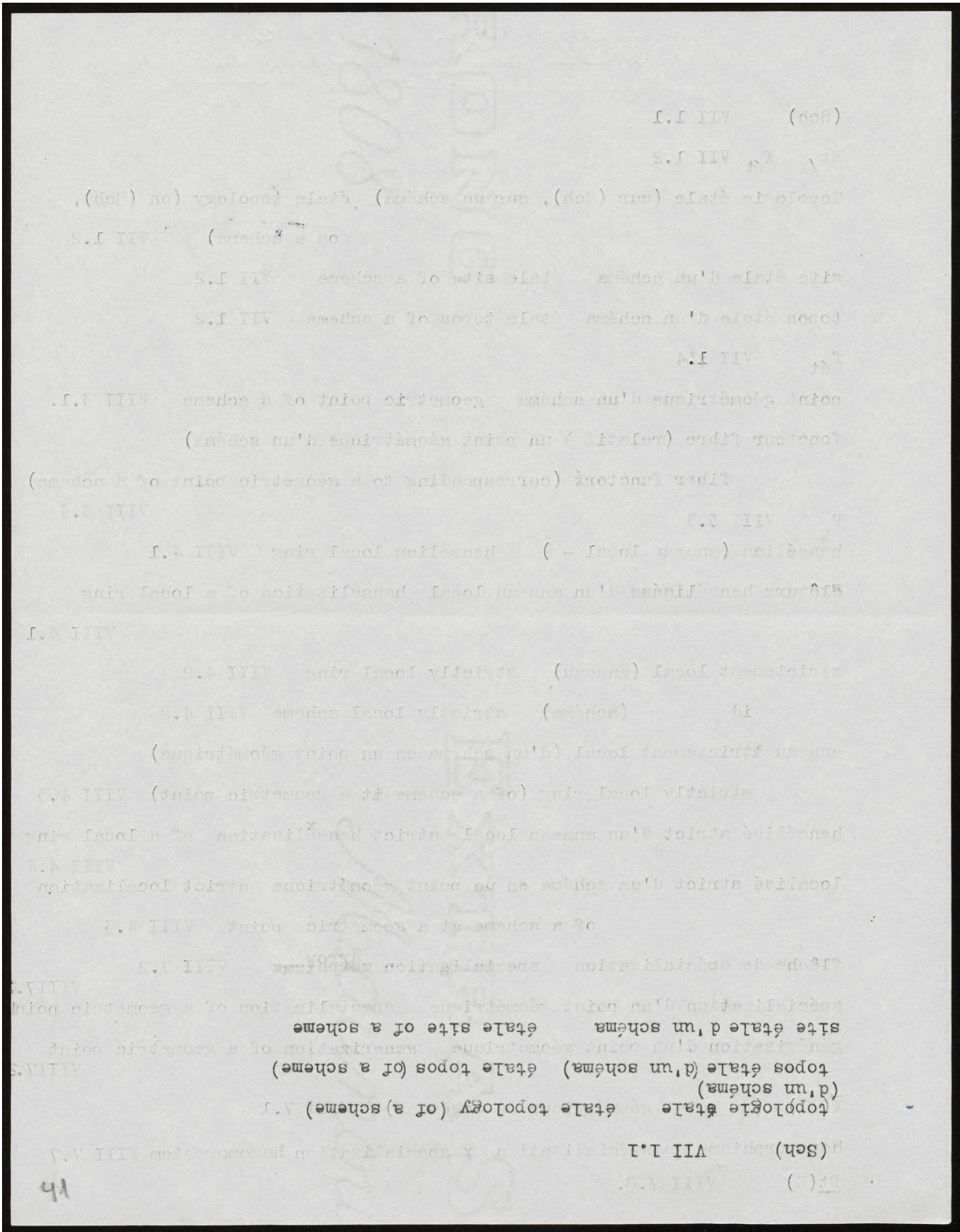
généralisation d'un point géométrique generization of a geometric point VIII 7.2

$\bar{X}(\xi)$ (ξ point géométrique du schéma X) VIII 7.1

Homomorphisme de spécialisation specialization homomorphism VIII 7.7

$\text{Pt}(E)$ VIII 7.8.

40



suite spectrale de descente spectral sequence of descent VIII 8.1
 * XVII

Hochschild-Serre (suite spectrale de -) VIII 8.4
 (faisceau de torsion) / (torsion sheaf)
 Faisceau de p-torsion, / p-torsion sheaf, IX 1.1 $\mathbb{P} = \text{ens. des nbs. premiers}$ IX 1.0

faisceau de ind-p-groupes, faisceau de groupes ind-finis
 sheaf of ind-p-groups, sheaf of ind-finite groups IX 1.5

localement constant (faisceau -) locally constant sheaf IX 2.0

constructible (faisceau d'ensembles, de groupes, de modules -)
 constructible ~~sheaf~~ sheaf of sets, groups or modules IX 2.3

connexe par arcs (schéma -) arcwise connected scheme IX 2.12

Kummer (théorie de -) IX 3.2

G_m , $(G_m)_X$, μ_n IX 3.0

Hilbert (théorème 90 de -) IX 3.3

diviseur de Cartier Cartier divisor IX 3.4

Artin-Schreier (théorie de -) IX 3.5

\mathcal{P} IX 3.5

faisceau gratte-ciel skyscraper sheaf IX 4.1

* morphisme trace trace morphism VIII 5.1, XVII ...
 l \mathcal{L} -dimension cohomologique d'un schéma \mathcal{L} -cohomological dimension of a scheme X 1

l $cd_{\mathbb{Z}}(X)$ X 1
 $cd_{qc} X$ X 5.0

fibration élémentaire elementary fibration XI 3.1

bon voisinage (relativement à S) nice neighbourhood relative to S

théorème de comparaison comparison theorem XI 4.4 (XI 3.2)

$X_{c\mathbb{Z}}$ XI 4.0

Val. 2 /
 * théorème de changement de base propre proper base change theorem XII 5.1
 morphisme de changement de base base change morphism XII 4, XVII ...

~~théorème d'axiomaticité~~

théorème d'acyclicité locale local acyclicity theorem XV 2.1, XIX 4.1

couple régulier de schémas regular pair of schemes XIX 3.1

théorème de changement de base par morphisme régulier

base change theorem for regular base change morphism XIX 4.2

$\mathcal{D}(F, f, y)$ XIX 6.0

formellement séparable (k-algèbre -) formally separable algebra XIX 6.7.

étendue algébrique VII 10.2

algebraic spread

espace algébrique VII 10.4

algebraic space

44

9.1.13. Questions ouvertes. Soit E un \bar{U} -topos. ordonne

a) Dans l'ensemble des sous-topos de E , le Inf de deux éléments est-il distributif par rapport aux Sup finis ? Pour des résultats dans ce sens, voir 9.1.11 e) et 9.1.12 d).

b) Soit E' un sous-topos de E , distinct de E .

Existe-t-il un sous-topos E'' de E , tel que $E'' \cap E' = \text{Top}(\emptyset)$, $E'' \neq \text{Top}(\emptyset)$?

c) Soient E' et E'' deux sous-topos de E tels que $E' \cap E'' = \text{Top}(\emptyset)$. Les conditions suivantes sont-elles équivalentes: (i) E est le sup de E' et E'' dans l'ensemble des sous-topos de E (on se retient à grand peine d'écrire cette condition $E = E' \vee E''$); (ii) E'' est le plus grand parmi les sous-topos E''_1 de E tels que $\text{Top}(E') \vee \text{Top}(E''_1) = \text{Top}(\emptyset)$; (iii) E'' est maximal parmi les E''_1 précédents. Il est clair que (ii) \Rightarrow (iii), que si a) est vérifié en a) (i) \Rightarrow (ii), que b) est vérifié si et seulement si $E'' = \text{Top}(\emptyset)$; donc une solution affirmative à a) et b) en implique qu'il y a une pour c). Noter aussi que la réponse aux questions posées (y compris d) qui suit) est affirmative si E est de la forme $\text{Top}(X)$, X un espace topologique localement noethérien (9.1.11 b), ~~ou si X est un topos fini~~ (9.1.12).

d) Si E est le sup des deux sous-topos E' et E'' , alors tout point de E est-il isomorphe à un point provenant de E' ou de E'' ?

Si la réponse à d) était affirmative, alors on aurait une réponse affirmative à a) pour les cas de sous-topos E', E'', E''' de E ayant suffisamment localement ment de points (donc a) serait vrai pour E noethérien, en vertu de 9.1.11 b)). Inversement, si a)

47

19

I un idéal d'un an local noethérien (A, \mathfrak{m}, k) de dimension d .
 On considère l'anneau $I^\wedge = \varprojlim I^n$.
 On a $I \cong \text{Top}(X)$, où X est l'anneau local A muni de la topologie \mathfrak{m} -adique. Plus
 précisément, les éléments de I sont des séries formelles en \mathfrak{m} sans terme constant.
 On a $x \in \mathfrak{m}^n$ si et seulement si x est dans \mathfrak{m}^n .
 La topologie définie sur I est la topologie \mathfrak{m} -adique (c'est-à-dire
 la topologie des séries) on a donc que $\text{Top}(I) \cong I^\wedge$.
 $\text{Car}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Car}(I^\wedge) \cong \text{Car}(I)$ donc

$$I^\wedge \cong \text{Car}(I^\wedge) = \text{Top}(I).$$

NB Le fait que $x \in \mathfrak{m}^n$ signifie que x est une puissance de \mathfrak{m}
 (c'est une application).

E est un A -module de torsion, donc $E \cong \bigoplus_{i=1}^r A/\mathfrak{m}^{n_i}$.
 E est engendré par les éléments de torsion finie qui sont les
 éléments de torsion.

$(E = C^\wedge)$, tous les éléments de C sont des puissances de \mathfrak{m} .

$(E = \text{Top}(X), X \text{ local})$, pour $x \in X$, l'anneau engendré par x est
 un anneau local noethérien de dimension d .

Corollaire 4.8. Sous les conditions de 4.7, supposons que Q soit exten-

tion d'un groupe algébrique B (nécessairement lisse et connexe) par un

dans 4.3, et la deuxième n'est autre que le premier cas de 4.6.

dont la première est un cas particulier de l'assertion de rigidité faite

et des relations

$$\text{Biext}_0(L, Q; \bar{G}^m) = 0, \text{ Biext}_1(L, Q; \bar{G}^m) = 0,$$

0 \leftarrow L \leftarrow P \leftarrow A \leftarrow 0,

suite exacte des Biext_i^1 ($i=0,1$) associée à la suite exacte

provenir que (4.7.1) est bien un isomorphisme. Mais cela résulte de la

Revenant au cas général (P extension de A par L), il reste à

pe qui revient au même, \bar{L} , provient d'une bixtension.

telles proviennent de bixtensions. Il en résulte que \bar{L} , ~~xxxx~~ ou

que sur un produit de deux schémas abéliens, les correspondances diviso-

donc que \bar{L} est isomorphe à \bar{L} . Or nous avons signalé dans VII 2.9.4

\bar{L} ont une restriction triviale à Exe_Q , on en conclut que \bar{M} est trivial,

que modulo l'image inverse d'un module inversible \bar{M} sur P. Comme \bar{L} et

c'est un module birigidité qui, par définition de \bar{L} , ne diffère de \bar{L}

$$\text{Id}_P^{\text{xt}} : \text{Ex}_Q \leftarrow \text{Ex}_P,$$

Soit \bar{L} l'image inverse du faisceau de Weil sur Ex_P par ~~xxxx~~

qui se factorise nécessairement par le schéma abélien dual P' de P.

$$f: Q \leftarrow \text{Pic } P/k,$$

au cas $A=P$. Or \bar{L} définit un morphisme de schémas ponctuels

f le \bar{M} sur Ax_Q , et pour la première assertion de 4.7, on est donc ramené

L que \bar{L} ~~xxxx~~ est isomorphe à l'image inverse d'un module birigidité

dans la démonstration de 4.6, on déduit de 4.5 et de l'hypothèse sur

en utilisant 4.3, au cas où k est séparablement clos. Procédant comme

Pour la première assertion, on se ramène encore, par descente et

25