UNPUBLISHED WORKS

Collection

par

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

`https://agrothendieck.github.io/`

CONTENTS

1954 7

Espaces vectoriels topologiques 7

Topological vector spaces 8

1955 8

A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf 9

Introduction 9
I. General fibre spaces 10
II. Sheaves of sets 13
III. Group bundles and sheaves of groups 14
IV. Fibre spaces with structure sheaf 14
V. The classification of fibre spaces with structure sheaf 14

1968 14

Tapis de Quillen 15

Tapis de Quillen 16

1. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux 16
2. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories 19
3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme 19

1969 20

Résumé de quelques résultats de Kostant 21

1970 21

Programme de la théorie de Dieudonné sur une base S où p est localement nilpotent 22

1972 22

Curriculum vitae 23

Principales publications 25

Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques 28

1. Analyse Fonctionnelle 28
2. Algèbre Homologique 29
3. Topologie 29
4. Algèbre 31
5. Géométrie Analytique 32
6. Groupes Algébriques 34
7. Groupes discrets 34
8. Groupes formels 35
9. Arithmétique 35
10. Géométrie Algébrique 36

Bibliographie 41

1974 46

Esquisse d'une théorie des Gr-Catégories 47

1. Structure des Gr-catégories 47
2. Catégories de Picard 50
3. Catégories de Picard enveloppantes 50

Bibliographie 50

1976 50

Complexe de De Rham à puissance divisée et ombres des modules 51

Notations 1/2 simpliciaux. Constructions universelles 53

Faisceautisation du topos de De Rham 55

1981 55

Structures Stratifiées 56

1. La situation la plus élémentaire 56
2. Stratification globale 57
3. Stratification globale 58
4. Topos canoniques associées à une stratification globale 58

1983 60

Notes Anabéliennes 61

I. Résultats de fidélité 61
II. La question de pleine fidélité 74
III. Étude des sections de E_U sur Γ 79
IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux 92

Structure à l'infini des $M_{g,\nu}$ 98

1. Courbes standard 98
2. Graphe associé à une courbe standard 99
3. Courbes "stables" et MD-graphes 101
4. La théorie de Mumford-Deligne 102
5. Spécialisation des MD-graphes 103
6. Morphismes de [] de graphes et de maquettes 104
7. Étude des [] de dim ≤ 2 [] détermination des graphes correspondantes 104
8. Structure [] 104
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([] MDT-structure) :

10. Structures MDT analytiques : [] 104
11. Digression : [] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux . . 104
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [] et leur dévissages en "topos élémentaires"
13. Digression sur stratification "locales" [] 104

Rapport d'activité 105

1986 108

Le Bi-icosaèdre 109

Vers une Géométrie des Formes 119
I. Vers une géométrie des formes (topologiques) 119
II. Réalisations topologiques des réseaux 120
III. Réseaux via découpages 120
IV. Analysis situs (première mouture) 120
V. Algèbre des figures 120
VI. Analysis situs (deuxième mouture) 120
VII. Analysis situs (troisième mouture) 121
VIII. Analysis situs (quatrième mouture) 121

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod ([ ]); or the "differeniable" and "analytic" (real or complex) variants of theses notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf $\mathbf{G}$. This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance "topological") classes of fibre bundles on a space X, with *abelian* structure group G, as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf $\mathbf{G}$ of germs of continuous maps of X into G; the word "continuous" being replaced by "analytic" respectively "regular" if G is supposed an analytic respectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of X into G. Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf $\mathbf{G}$, where $\mathbf{G}$ is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in $\mathbf{G}$. The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the las chapter, we define the cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in the sheaf of groups $\mathbf{G}$,

[]

I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space

Definition **1.1.1.** — *A* fibre space *over a space X is a triple (X, E, p) of the space X, a space E and a continuous map p of E into X.*

We do not require p to be onto, still less to b open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p. For abbreviation, the fibre space (X, E, p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X. X is called the *base space* of the fibre space, p the *projection*, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the *fibre* of x (in E).

Given two fibre spaces (X, E, p) and (X', E', p'), a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such that $p'g = fp$, i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & X' \end{array}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g. The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f-homomorphism of E into E'. If, moreover, E'' is a fibre space over X', f' a continuous map $X' \longrightarrow X''$ and $g' : E' \longrightarrow E''$ a f'-homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$-homomorphism. If f is the identity map of X onto X, we say also X-homomorphism instead of f-homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X, without further comment, we will always mean X-homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space (X, E, p) onto a fibre space (X', E', p') is clear: it is a homomorphism (f, g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let (X, E, p) be a fibre space over the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X. Then the *inverse image* of the fibre space E by f is a fibre space E' over X'. E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x', y) such that $fx' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x', y) = x'$. The map $g(x', y) = y$ of E' into E is then an f-homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a *homeomorphism* of the fibre of E' over x' *onto* the fibre of E over $f'x'$.

[]

1.3 Subspace, quotient, product

Let (X, E, p) be a fibre space, E' any subspace of E, then the restriction p' of p to E', defines E'

[]

1..4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X, called the *trivial fibre space over X with fibre F*.

All fibres are canonically homeomorphic with F.

[]

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let X be a space, (U_i) a covering of X, for each

[]

1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space over T over X, and where, given an open covering (U_i) of X, we consider the fibre spaces

[]

1.7 Sections of fibre spaces

Definition **1.7.1**. — *Let (X, E, p) b a fibre space; a* section *of this fibre space (or, by pleonasm, a section of E over X) is a map x of X into E such that ps is the the identity map of X. The set of* continuous *sections of E is noted* $\mathrm{H}^0(X, E)$.

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x!).

The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A *section of E over a subset Y* of X is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $\mathrm{H}^0(Y, E)$ for the set $\mathrm{H}^0(Y, E|Y)$ of all continuous sections of E over Y.

$\mathrm{H}^0(X, E)$ as a *functor*. Let E, E' be two fibre spaces over X, f an X-homomorphism of E into E'. For any section s of E, the composed map fs

is a section of E', continuous if s is continuous. *We get thus a map, noted* f, *of* $\mathrm{H}^0(X,E)$ *into* $\mathrm{H}^0(X,E')$. The usual functor properties are satisfied:

a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, the so is f.

b. If f is an X-homomorphism of E into E' and f' an X-homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'f$.

Let (X,E,p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X, and E' the inverse image of E under f.

II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word *"section"* for *"continuous section"*.

2.1 Sheaves of sets

Definition **2.1.1.** — *Let* X *be a space. A* sheaf of sets *on* X *(or simply a* sheaf*) is a fibre space* (E,X,p) *with base* X, *satisfying the condition: each point* a *of* E *has an open neighbourhood* U *such that* p *induces a homeomorphism of* U *onto an open subset* $p(U)$ *of* X.

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

2.2

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

2.4 Permanence properties

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

2.6 Some examples

a.

b.

c.

d. **Sheaf of germs of subsets**. Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U. If $V \subset U$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $\mathrm{H}^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called *germs of sets in* X. Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

III. Group bundles and sheaves of groups

IV. Fibre spaces with structure sheaf

V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

TAPIS DE QUILLEN
6.9.1968

TAPIS DE QUILLEN

10.9.1968

I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}\,.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \longrightarrow \varprojlim^{(i)}_{C} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos $\widetilde{C}$, qui varie de façon *covariante* avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \widetilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C ($\overset{\text{def}}{=}$ les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de $\widetilde{C}$, définis intrinsèquement en termes de $\widetilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\widetilde{F} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\widetilde{C'}$, les applications induites $\mathrm{H}^i(\widetilde{C'}, F') \longrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \text{Ssimpl} \longrightarrow \text{Cat},$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec Ssimpl, et que pour toute C, la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" i.e. canoniquement isomorphe a C dans la catégorie quotient de Cat obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Ssimpl est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$, d'où des foncteurs $S' : \text{Cat}' \longrightarrow \text{Ssimpl}'$ et $T' : \text{Ssimpl}' \longrightarrow \text{Cat}'$ entre les catégories "homotopiques", construites avec Cat resp. Ssimpl, qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Cat' entre C et la catégorie opposée C°, ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Ssimpl' entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C, transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C°, compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \amalg_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F, on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $\mathrm{Ssimpl}_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $\mathrm{D}^b_{lc}(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C', dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mains constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi : Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X', f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \longrightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i, et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G, les $\mathrm{H}^j(U,G) \longrightarrow \mathrm{H}^j(U_i,G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ [1]. Alors le foncteur $\mathrm{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathrm{D}^b_{lc}(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X'. Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C'.

Principe de démonstration : on commence par prouver ce dernier résultat, en notant que si un topos est localement hom. trivial, il est loc. connexe et loc. simplement connexe, d'où une bonne théorie du π_0 et du π_1 (qui sont ici discrets), et on est ramené à un cas particulier du critère d'homotopisme de Artin et Mazur, savoir un critère cohomologique pour qu'un homomorphisme de groupes

[1] Attention, cette condition n'est typiquement *pas* satisfaite par les schémas avec leur topologie étale)mais bien par [] avec top. Zariski).

$G \longrightarrow H$ (ici les groupes π_1 de X, X') soit un isomorphisme : il doit induire des isomorphismes sur les H^0 et H^1 (y inclus dans le cas non commutatif...). On prouve la pleine fidélité en se ramenant par la suite spectrale encore, cela résultera du fait suivant : si X est localement hom. trivial, alors la catégorie des faisceaux abéliens loc. constants est stable par $\underline{\mathrm{Ext}}^i$, et le foncteur $M \mapsto M_X$ de Ab dans X_{ab} commute aux dits Ext^i. En fait, X et X' étant loc. homp. triviaux, les conditions suivantes sur f seront équivalentes :

a) f est un homotopisme, i.e. induit pour tout système local (pas néc. commutatif) sur X' un isomorphisme sur les H^i.

b) f induit une équivalence $\mathrm{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathrm{D}^b_{lc}(X)$.

a') f induit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux abéliens sur X' et X, et des isomorphismes sur les H^i correspondants (donc on ne prend ici que des coefficients commutatifs).

J'ignore si on peut dans a) se borner aux systèmes locaux commutatifs. L'équivalence entre a) et b) fournit une première justification ou motivation pour définir des types d'homotopie via la catégorie $\mathrm{D}^b_{lc}(X)$, éventuellement muni de la sous-catégorie pleine de tous les systèmes locaux sur X, et du foncteur cohomologique sur $\mathrm{D}^b_{lc}(X)$ à valeurs dans le dite catégorie, et bien sur du produit tensoriel (mais alors on sort de D^b pour entrer dans D^-, redactor demerdetur).

2. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories

3. Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme

Soit C la catégorie des variétés différentiables (pas nécessairement orientables), les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Si B est une catégorie, on s'intéresse aux couples $(F_\bullet, F^\bullet)$ d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant de C dans B, satisfaisant les conditions que pour tout $X \in$

$\mathrm{Ob}\, C$, on a $F_\bullet(X) = F^\bullet(X)$, et que si on a un produit fibré ordinaire

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

avec f et g

CURRICULUM VITAE
DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole ; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collage de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathematical Society". Je passe alors deux ans à l'Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [6, 7], mais en même temps, sous l'influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Ces dernières continueront à m'occuper jusqu'à aujourd'hui, et son encore très loin d'être menées à leur terme. Ce sont elles qui m'occuperont surtout pendant l'année 1955 passée à l'Université du Kansas (USA) ; j'y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [8], et développe des notions de "cohomologie non commutative" dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [16, SGA 4].

À partir de 1956 je suis resté en France, à l'exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j'ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l'IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l'IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu'à une date récente, mon intérêt principal s'est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l'algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d'un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d'ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [16, 17], d'abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l'assistance d'un nombre croissante de chercheurs de valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel “Survivre”, et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

Principales publication

Espaces Vectoriels Topologiques

1. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186.

2. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Crelle 192 (1953), p. 35-64 et 77-95.

3. *Espaces Vectoriels Topologiques*, Notes polyc., Sao Paulo (1954), 240 p.

4. *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Bras. 3 (1954), p. 57-123.

5. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. AMS, n° 16 (1955), 329 p.

6. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique*, Bull. Sao Paulo 8 (1953), p. 1-79.

7. *La théorie de Fredholm*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 319-384.

Topologie et algèbre homologique

8. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku M.j., 9 (1957), p. 119-221.
9. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 1-7.

Géométrie analytique

10. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J., 79 (1957), p. 121-138.
11. *Techniques de construction en géométrie analytique*, Sem. H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7 à 17.

Géométrie algébrique

12. *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), p. 137-154.
13. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Crelle 200 (1958), p. 137-154.
14. *The cohomologie theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Int Congress, Edinburgh (1958), p. 103-118.
15. *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la coll. de Jean DIEUDONNÉ), Chap. I-IV, publ. Math. IHES (1960/67), env. 1800 pages.
16. *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA 1, ...,7), IHES, 1960/69, env. 4000 pages (en cours de réedition chez Springer, Lecture Notes) :

SGA 1 Théorie du Groupe Fondamental

SGA 2 Cohomologie locale et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

SGA 3 (en coll. avec M. Demazure) Schémas en Groupes des Topos et Cohomologie étale des Schémas

SGA 5 Cohomologie ℓ-adique et fonctions L

SGA 6 (en coll. avec J. Berthelot et J.L. Illusie) Théorie des Intersections et Théorèmes de Riemann-Roch

SGA 7 Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique

17. *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*, Invent. Math. 2 (1966), p. 59-78.

18. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (en coll. avec J. Giraud, S. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate), North Holland, 1968.

19. *Catégorie cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, LectureNotes in Maths., Springer n° 79 (1968), 167 pages.

ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [19]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans les présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck ; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [*].

1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance p-ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces (DF) [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [*] sur les "Fonctions Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les espaces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

Références : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de "l'usager" et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies ℓ-adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines...). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [*]); théorie des catégories dérivées (dévelopée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [*], Illusie [*] et [16 SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une "algèbre homotopique" dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [*], soit dans l'esprit de la théorie des n-catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [*]).

Références : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le K-invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algèbrqiue du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations λ_i et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens commme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc…

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([16, SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie ℓ-adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en *théorie des catégories* et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en K-théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car. $p > 0$).

Références : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen, M. Karoubi…

4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la K-théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des K^i supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation $K(A[t]) \simeq K(A)$, où A est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continuelle depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [15, 16], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [*]).

   Références : J. Giraud, P. Gabriel.

b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [15], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau *excellent* et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

   Références : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [16, SGA 3]) à la théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [18].

Références : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car. $p > 0$, je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [16, SGA 6, Exp. XIII et XIV]).

Références : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [*] et O. Forster et K. Knorr [*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par une théorème d'existence., et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces "modulaires" "globaux" comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires "locaux" de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle ("th. d'existence des modules formels", cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [*].

b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [*] et J.P. Ramis et G. Ruget [*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [*].

c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.

d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [*].

e) *Espaces rigide-analytiques.* M'inspirant de l'exemple de la "courbe elliptique Tate", et des besoins de la "géométrie formelle" sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [*]. Par ailleurs, les "cristaux" que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique > 0 peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations profondes entre cohomologie cristalline en car. > 0, et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en car. nulle.

Références : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

Références : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern ℓ-adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret G, la théorie des représentations linéaires de G (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini $\hat{G}$ de G.

8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles > 0, en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

Références : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions L associées à des faisceaux ℓ-adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions L associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions L en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces résultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d'invariants arithmétiques subtils comme les fonctions ζ et L des variétés, et l'interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l'heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car. > 0). Il y a là un champ d'étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de "motif" (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu'on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu'au bout, l'heure de ce genre d'investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

Références : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne…

10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C'est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c'est dans cette optique que se placent pour l'essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

a) *Travail de fondement* : Il s'agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l'arithmétique. C'est fait pour l'essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l'introduction et l'étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des "algebraic spaces" de M. Artin (cf. Knutson [*]), les "algebraic stacks" ou "multiplicités algébriques" de P. Deligne et D. Mumford (*), des "schémas relatifs" de la thèse de M. Hakim [*] (en attendant les "multiplicités formelles" et les "multiplicités algébriques relatives" sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c'est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd'hui le "pain quotidien" de la grande majorité des géomètres algébristes, et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques

c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des *"modules" formels*, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par une schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.

d) *Théories cohomologiques* :

   1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [*], cf. aussi [18 bis].

2°) *Cohomologie ℓ-adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions L, [16, SGA 15].

3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].

4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [*].

e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :

D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents…). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*].

f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés "définitifs", en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* :

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe "de Chow" des classes de cycles sur une variété X, et un certain groupe de "classes de faisceaux cohérents" (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe $K(X)$ (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la "formule de Riemann-Roch différentiable", développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation "relative" du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens* :

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le *"théorème de réduction semi-stable"* et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un H^1 relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie* :

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques* :

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait ^etre", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [*] et M. Demazure [*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois précise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)

Analyse fonctionnelle

1 bis. *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, Journal d'Analyse Math. vol II, pp. 243-280 (1952/53).

2 bis. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Soc. Mat. de Sao Paulo, vol. 8°, pp. 85-110 (1953).

3 bis. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canadian Journal of Math., Vol. 5, pp. 125-173 (1953).

4 bis. *Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p*, Can. J. Math. vol. 6, pp. 158-160 (1953).

5 bis. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1*, Can. Journ. Math. vol. 7, pp. 552-561 (1955).

6 bis. *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace*, Séminaire Bourbaki n° 115 (Mars 1955).

7 bis. *Un résultat sur le dual d'une C^*-algèbre*, Journ. de Math. vol. 36, pp. 97-108 (1957).

8 bis. *The trace of certain operators*, Studia Mathematica t. 20 (1961) pp. 141-143.

Algèbre Homologique

9 bis. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.

10 bis. *Standard conjectures on algebraic cycles*, Proc. Bombay, Coll. on Alg. Geom. 1968, pp. 193-199.

Algèbre

11 bis. (en collaboration avec J. Dieudonné) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*, Journal of Algebra, vol. 5, pp. 305-324 (1967).

Groupes algébriques

12 bis. Exposés 4 (Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections) et 5 (torsion homologique et sections rationnelles), in Anneaux de Chow et applications, Sém. Chevalley à l'ENS, 1958, (36 p + 29 p.).

Groupes discrets

13 bis. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. vol 2, pp. 375-396 (1970).

Groupes Formels

14 bis *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congr. Int. math. 1970, t. 1., pp. 431-436.

Géométrie Algébrique

15 bis. *Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique* (recueil des exposés Bourbaki n° 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236), Secrétariat de l'IHP, rue Pierre Curie, Paris (1958-1962).

16 bis. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, vol. 29, pp. 95-103 (1966).

17 bis. *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology, vol. 8, pp. 299-303 (1969).

18 bis. *Local cohomology* (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. n° 41 (1967), Springer.

19 bis. (en coll. avec J.P. Murre) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood…* Lecture Notes in Math. n° 208 (1971), Springer.

20 bis. (avec H. Seydi), *Platitude d'une adhénrece a schématique et lemme de Hironaka généralisé*, Manuscripta Math. 5, pp. 323-339 (1971).

Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck

M. ARTIN, Algebraization of Formal Moduli, I (in Global Analysis, pp. 21-71, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1968), II Existence of modifications, Annals of Mathematics, Vol. 91, pp. 88-135 (1970).

M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 65, pp 276-281 (1959).

P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas propres et lisses de caractéristique $p > 0$, Thèse, Université Paris VII, 1971 (paraîtra dans Lecture Notes of Math. chez Springer).

P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Classes de Chern en cohomologie cristalline, C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, pp. 1695-1697 (22 juin 1970) et p. 1750-1752 (29 juin 1970).

A. BOREL et J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, t. 86, pp. 97-136 (1958).

P. DELIGNE, Théorie de Hodge I (Actes du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970) et II, Publications Math. n° 40, pp. 5-57 (1971).

P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Pub. Math. n° 36, pp. 75-110 (1969).

M. DEMAZURE, Motifs des variétés algébriques, Sém. Bourbaki n° 365, 1969/70.

A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts…, Ann. Inst. Fourier, vol. 16, pp. 1-98 (1966).

O. FORSTER et K. KNORR, Relativ-analytische Raume und die Koharenz von Bildgarden, Inventions Math. Vol. 16, pp. 113-160 (1972).

I.M. GELFAND et N. Ja. VILENKIN, Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1968 (traduction).

J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, Grundlehren des Maths. Wiss. Bd. 179, 1971, Springer.

M. HAKIM, Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse des Math. Bd. 64, 1972, Springer.

R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20 (1966).

L. ILLUSIE, Complexe Cotangent et Déformations I, Lecture Notes in Math. n° 239 (1971), Springer et II, idem, n° 283 (1972).

R. KIEHL, Relativ analytische Raume, Inventiones Math. vol. 16, pp. 40-112 (1972).

D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes in Math. n° 203 (1971), Springer.

F.N. LAWVERE, Toposes, algebraic geometry and logic, LEcture notes in MAth., n° 274 (1972), Springer.

I. MANIN,

a) Théorie des groupes formels commutatifs sur des corps de caractéristique finie, (en russe) Uspekhi mat. Nauk, 1963, t. 18, pp. 3-90. (Il existe une traduction anglaise de l'Amer. Math. Soc).

b) Correspondances, motifs et transformations monoïdales (en russe), Mat. Sbornik t. 77, pp. 475-507.

W. MESSING, The crystals associated to a Barsotti-Tate group, Lecture Notes in Math. n° 264 (1971) Springer.

D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd 34, 1965, Springer.

J.P. MURRE, On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, Pub. Math. n° 23, pp. 5-43 (1964).

D. QUILLEN, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. n° 43 (1967), Springer.

M. RAYNAUD, Spécialisation du Foncteur de Picard, Publications Math. n° 38, pp. 27-76 (1970).

Mme. M. RAYNAUD, Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse Paris 1972 (paraîtra dans Lecture Notes of Math.)

J.P. RAMIS et G. RUGET, Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. n° 38, pp. 77 à 91 (1970).

J. TATE, Rigid-analytic spaces, Inventiones Mathematicae, vol. 12, pp. 257-289 (1971).

G. TRAUTMANN, Abgeschlossenheit von Corandmoduln une Fortsetzbarkeit koharenter analytischer Garben, Inventiones MAth. vol. 5, pp. 216-230 (1968).

J.L.VERDIER, J.P. RAMIS et G. RUGET, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inventiones MAth., vol. 13, pp. 261-283 (1971).

ESQUISSE D'UNE THÉORIE DES Gr-CATÉGORIES

par Mme Hoang Xuan Sinh

Nous donnons un résumé de quelques résultats sur les Gr-catégories, faisant l'objet d'un travail détaillé que l'auteur compte présenter prochainement comme thèse de doctorat [1].

1. Structure des Gr-catégories

Notre terminologie est celle de Saavedra [2]. Nous nous intéressons à des catégories C munies d'une opération binaire $(X,Y) \mapsto X \otimes Y$ (foncteur de $C \times C$ dans C) associative et unitaire à isomorphisme donné près (satisfaisant des conditions de compatibilité explicitées dans loc. cit.), appelées aussi $\otimes$-catégorie AU (associatives-unitaires). On dit qu'une telle catégorie est une Gr-catégorie si c'est un groupoïde et si tout objet X de C est "inversible", i.e. admet un objet "inverse" $Y = X^{-1}$ (satisfaisant $X \otimes Y \simeq Y \otimes X \simeq 1_C$, où 1_C désigne l'objet unité de C). Les exemples abondent :

Exemples.

1 . X étant un espace topologique ponctué par $x \in X$, on prend pour C la catégorie des lacets de X en x, avec comme morphismes les classes d'homotopie d'homotopies entre lacets, comme opération $\otimes$ la composition des lacets (qui n'est pas associative, mais associative "à homotopie près").

Variante : G est un espace de Hopf associatif (ou simplement homotopiquement associatif en un sens suffisamment fort), C la catégorie dont les objets sont le points de G, les morphismes les classes d'homotopie de chemins entre points de G, la loi $\otimes$ étant induite par la loi de composition de G. (N.B. Lorsque G admet un espace classifiant X, on retrouve essentiellement l'exemple précédent).

2 . Si F est un faisceau sur un espace topologique (ou plus généralement sur un topos), la catégorie C des torseurs sous F, munie de la composition de Baer, est une Gr-catégorie (et même une catégorie de Picard stricte, cf. plus bas). On peut considérer la catégorie C des Modules inversibles sur un espace (ou topos) localement annelé $(X, \underline{O}_X)$ comme le cas particulier correspondant au cas $F = \underline{O}_X^*$.

3 . Si A est une catégorie, la sous-catégorie pleine C de $\underline{\mathrm{Hom}}(A,A)_{\mathrm{is}}$ formée des équivalences de A avec elle-même, munie de l'opération de composition des foncteurs, est une Gr-catégorie. Au lieu de prendre pour A une catégorie, on peut pas généralement prendre pour A un objet d'une 2-catégorie quelconque. Si p.ex. F est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif) sur un espace topologique (ou un topos) X, prenant pour A le "champ" sur X formé des F-foncteurs à droite, la Gr-catégorie des auto-équivalences de A avec lui-même s'interprète comme la catégorie des "bitorseurs" sous F, i.e. des faisceaux P sur lesquels F opère à la fois à droite et à guache, ces opérations commutant et chacune d'elles faisant de P un torseur (à droite ou à guache) sous F, — la composition $\otimes$ étant la composition de Baer évidente. Lorsque F est encore de la forme $\underline{O}_X^*$ ($\underline{O}_X$ étant un faisceau d'anneaux, qu'on ne suppose plus nécessairement commutatif) ces bitorseurs s'interprètent aussi en termes de bi-Modules "inversibles" sous $\underline{O}_X$.

Structure. — Soit C une Gr-catégorie, on lui associe

a) le groupe $\pi_0(C)$ des classes d'isomorphisme d'objets de C,

b) le groupe $\pi_1(C)$ des automorphismes de 1_C (objet unité de C)

c) une action de $\pi_0(C)$ sur $\pi_1(C)$, en associant à tout objet X de C

l'automorphisme $p(X)$ de 1_C déduit des deux isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(1_C) \rightrightarrows \mathrm{Aut}(X)$$

donnés par $u \mapsto u \otimes \mathrm{id}_X$ et $u \mapsto \mathrm{id}_X \otimes u$.

On prouve que $\pi_1(C)$ est un groupe *commutatif* et que l'on obtient bien par c) une structure de $\pi_0(C)$-module sur celui-ci. Ceci posé, si on choisit pour tout $a \in \pi_0(C)$ un représentant $L_a \in \mathrm{Ob}\, C$ de a, et pour deux a, b un isomorphisme

$$\varphi_{a,b} : L_a \otimes L_b \simeq L_{ab},$$

alors pour trois éléments $a, b, c \in \pi_0(C)$, l'isomorphisme d'associativité

$$(L_a \otimes L_b) \otimes L_c \simeq L_a \otimes (L_b \otimes L_c),$$

compte tenu des isomorphismes $\varphi_{a,b}$, $\varphi_{ab,c}$, $\varphi_{b,c}$ et $\varphi_{a,bc}$, peut s'interpréter comme un isomorphisme

$$L_{abc} \simeq L_{abc},$$

ou encore comme la tensorisation à guache avec un élément bien déterminé

$$f(a, b, c) \in \pi_1(C).$$

Les $\varphi_{a,b}$ étant choisis, on voit donc que la donnée d'un isomorphisme d'associativité fonctoriel $(L \otimes L') \otimes L'' \simeq L \otimes (L' \otimes L'')$ équivaut à la donnée de l'application

$$f : \pi_0 \times \pi_0 \times \pi_0 \longrightarrow \pi_1.$$

On vérifie alors que l'axiome standard d'autocompatibilité d'une donnée d'associativité (axiome du pentagone) s'exprime précisément par la condition que f soit un *3-cocycle* du groupe π_0 à valeurs dans le groupe π_1. D'autre part, l'indétermination dans le choix du système d'isomorphismes $\varphi_{a,b}$ est précisément donnée par une 2-cochaine arbitraire, et on voit que si on change φ par une 2-cochaine g, f est changé en $f + dg$ - donc l'ensemble des f correspondants à des choix différents de φ est exactement une classe de 3-cohomologie

$$k(C) \in \mathrm{H}^3(\pi_0(C), \pi_1(C)).$$

En précisant ces réflexions, on trouve que la classification, à $\otimes$-équivalence près, des Gr-catégories, se fait précisément en termes de un groupe π_0, d'un groupe commutatif π_1 sur lequel π_0 opère, et d'une classe de cohomologie (qui peut être prise arbitraire) dans $H^3(\pi_0, \pi_1)$. La loi de groupe du H^3 admet d'ailleurs une interprétation "géométrique" à la Baer, en termes d'opérations sur les Gr-catégories.

Cas particuliers. — Dans l'exemple

2. Catégories de Picard

3. Catégories de Picard enveloppantes

Bibliographie

[1]. Gr-catégories

[2]. NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES[2]

---

1) Historique

   a) Notion de forme diférentielle (*Poincaré*) et formule de Stokes

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad \text{(d'où } \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C}).\text{)}$$

   b) Th. de DE RHAM (conjecturé par E. CARTAN). Mais [-] Maintenant est bien compris : th. des faisceaux [-]

   c) Théorie de HODGE des integrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X)$ si X kählérienne compacte.)

   d) Théorème de CARTAN-SERRE sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).

   e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base [?] (ou schéma de base général) : DWORK, WASHNITZER-MONSKY, plus tard le yoga 'cristallin' développé par BERTHELOT, ILLUSIE, MESSING, MAZUR (cf avec Hartshorne, Herrera, Ogus, Bloch (?)). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne [?] sont plus à 'anneau de coefficients' de caractéristique [?] nulle, i.e. contenant $\mathbf{Q}$ — i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.

---

[2] Plan du conférence à l'IHES en 1976

f) Th. de GROTHENDIECK pour variétés algébriques sur **C** (généralise par DELIGNE, HARTSHORNE pour des coefficients plus généraux). Ceci donne [?] confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomologie de De Rham 'algébrique' des schémas algébriques.

g) Complexe de DE RHAM-SULLIVAN pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières* C^∞ (resp. **C**-algébriques, resp. **R**-algébriques, resp. **Q**-algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans **C** (resp. **R**, resp. **Q**) (facile)

$$\begin{array}{ccccc} C^\bullet_{\mathbf{R}-\text{alg.}} & \subset & C^\bullet_{C^\infty} & \subset & C^\bullet \\ & & \cup & & \\ & & C^\bullet_{\text{DR}} & & \end{array}$$

Sullivan montre mieux que le **Q**-type d'homotopie de X est récupéré si X est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par

[]

Mais à nouveau, on perd la torsion !

[]

NOTATIONS 1/2 SIMPLICIAUX. CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES
1975 ou 1976

$\mathbf{\Delta}$ = catégorie des simplexes Δ^n ($n \geq 0$), $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$ avec relation d'ordre total.

$\mathbf{\Delta}\hat{}= \mathrm{Ss} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathrm{Ens}) = \mathrm{Ens}_*$.

Plus généralement, si A est une catégorie, on pose

$$A_* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, A)$$

$$A^* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, A),$$

donc

$$(A^\circ)^* \simeq (A_*)^\circ, \quad A^* \simeq ((A^\circ)_*)^\circ,$$

où l'exposant $\circ$ désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de A_* (resp. A^*) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans A, les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira Ens_* quand on a en vue cet aspect, et $\mathbf{\Delta}\hat{}$ ou Ss quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos'[3]. Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie',

[3]On veut garder [?] à l'aspect [?] la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation Ss quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs $\boldsymbol{\Delta}^{\wedge} = \mathrm{Ens}_*$), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

Un objet de A_* sera généralement noté par un symbole de la forme K_*, où K_* désigne la famille des

[]

Néanmoins, alors que (dans le cas de $A = \mathrm{Ab}_*$ disons) Ab_{k*} et Ab_k est leur structure multiplicative - qui ne se correspond *pas* par DP et ND — celle de Ab_{k*} est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type $\bigwedge^i$, Γ^i, ^{i}, elles manquent purement et simplement dans $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ (sauf de les [définit] par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur Ab_{k*} ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

1.

Soit X un topos, et

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \Phi$$

une immersion de $\mathbf{Z}$ dans un faisceau Φ, tel que

STRUCTURES STRATIFIÉES

1. La situation la plus élémentaire

En un ses qui apparaître, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si Y, X, X^* sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données “élémentaires”, dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s'envoie dans l'un et dans l'autre, donnant [] [] qui exprime (8). C'est ici que l'hypothèse de *locale []* a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d'une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c'est []] qui devrait [] le contexte topossique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la “locale trivialité” [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudrai de plus travailler avec des types d'homotopie profini, et même sans doute “localiser” ces types d'homotopie en l'un des [] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n'est que alors ce contexte [] des théorèmes qu'il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d'homotopie []

Si on suppose par exemple que []

allusion, en devrait [] exprimer alors le *type d'homotopie de* X (et non seulement son π_1) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendemment de toutes hypothèses de nullité de [] π_i, ou de []) comment reconstruire en termes du diagramme (8), [] faisceaux sur X, [] tels que l'on ait

$$(16) \qquad F|X^* \quad \text{et} \quad F|Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie F est équivalent en effet à celle des systèmes

$$(17) \qquad (E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

E_{X^*} est un système locale sur π, X^* (un recouvrement étale de X^*), $E_{Y,X}$ un système locale sur [] un homomorphisme de systèmes locaux sur []

$$(18) \qquad \varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

2. Stratification globale : [] (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique X - par le suite X [] un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale", [] de la façon habituelle - ce qui [] alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour []. De même [].

Soit I un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de X. On suppose [] Posant [] on a un morphisme canonique

$$(3) \qquad X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé [] On voit alors que les deux projections [] ont respectivement les propriétés suivantes : [] Par ailleurs

3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à puisant : []

Notons que pour tout X' au dessus de X, le famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des X_{Δ_r} - comme image inverse le lui des X'_{Δ_r}, défini par les X'_i, [] des isomorphismes []

NB. Nous appliquons ces [] sauf en cas où X' est un ouvert de X. C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les X_i ou les X_i^* non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de X comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur X[4] - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où I *est fini*.

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit I' une partie de I telle que

$$i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I' \tag{7}$$

[4] *non*, ce n'est pas absolument clair []

et tout

$$X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad \text{(partie fermée de } X\text{)} \tag{8}$$

On a bien sûr [] (et aussi []) [] à (11 d). Dans ces formules, I', I'', les I'_α sont des parties de I satisfaisant (7) ([] *cribles* de I).

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec le stratification de X' définie par les X_i avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les "parties cribles" de X' pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de X, sont les mêmes - [] sur $X' = X_{I'}$ des parties-cribles de l'espace stratifié X.

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type I' de $X' = X_{J'}$, sont les espaces []

[] pour une instant à X, et considérons l'un I_0 des $i \in I$ tel que $X_i = \varnothing$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \varnothing$, [] si $i \in I_0$. [] on voit que les diagrammes de type $\widetilde{I}$ défini par l'espace stratifié X [] en remplaçant I par $I \backslash I_0$, ou plus guère par $I \backslash I'_0$, où $I'_0 \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme [] qu'est *contenu* dans $\widetilde{I}$ (cela est vrai pour *toute* crible de I).

Si par exemple on a deux cribles

$$I'' \subset I' \subset I \tag{14}$$

d'où

(15)

[] regarder plutôt la stratification de type $I' \backslash I''$, définie par les

(16)

dont les topos élémentaires sont dans les $X_{i'}^*$ ($i' \in I' \backslash I''$) et des [] couples (i', j') avec $i' \in I' \backslash I''$ [] on a

(17)

mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par C sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I',I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

NOTES ANABÉLIENNES

I. Résultats de fidélité

À tout corps K, associons son topos étale B_K, qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de B_K est noté Π_K, il est anti-équivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de K. Si $\overline{K}$ est un telle clôture, son groupe des K-automorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ ou $E_{\overline{K}/K}$ s'identifie au groupe des automorphismes des points de B_K associé à $\overline{K}/K$ (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de K est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue, B_K se reconstitue à partir de Π_K, comme le topos des systèmes locaux (continues) sur Π_K - et en termes de $E_{\overline{K}/K}$, comme le topos des ensembles discrets à actions continues de $E_{\overline{K}/K}$.

Pour un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$, i.e. un homomorphisme de schémas $\mathrm{Spec}\, K' \longrightarrow \mathrm{Spec}\, K$, on a un morphisme de topos correspondant

(1) $$\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

(2) $$\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K.$$

Ceci [s'explicait] en disant qu'un objet [] $\Pi_{K'}$ (i.e. point de $\mathrm{B}_{K'}$, ou revêtement universel de $\mathrm{B}_{K'}$, ou clôture séparable $\overline{K'}$ de K') en définit un des Π_K (ainsi, on prend $\overline{K}$ = clôture algébrique séparable de K' dans $\overline{K'}$) et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K} \tag{3}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une "restriction des scalaires".

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de $E_{\overline{K}/K}$ qui correspond à la sous-extension K_1 de $\overline{K}/K$, clôture algébrique séparable de K dans K', i.e. $K_1 = \overline{K} \cap K'$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[d] \\ \overline{K} \arrow[r] & \overline{K'} \end{tikzcd}$$

Quand K' est une extension de type fini de K, K_1 est une extension finie de K, et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à $E_{\overline{K},K}$ si et seule si $K_1 = K$ i.e. K est séparablement algébrique clos dans K'. D'ailleurs, on montre sans mal que (si K est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si K' est une extension algébrique de K. Donc il est bijectif si et seule si K' est une extension [radicielle] de K. Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que $K \longrightarrow K'$ est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$, est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps $K \longrightarrow K'$ (de caractéristique 0) à ceux que fait de K' une extension de type fini de K.

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées **Q** - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*[5].

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$ ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si K est séparablement clos, B_K est le "topos ponctuel", Π_K le groupoïde ponctuel, $E_{\overline{K}/K} \simeq 1$ - il est donc

[5]au cas []

que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topos étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps K un objet plus fin que B_K ou Π_K, à savoir le système projectif des B_{K_i}, ou des Π_{K_i}, pour K_i sous-corps de K de type fini sur le corps [], et à un système $(K, \overline{K})$ le système projectif des $E_{\overline{K}_i/K_i}$, où $\overline{K}_i$ est le clôture algébrique séparable de K_i dans $\overline{K}$. On []

$$\begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ \mathrm{B}_K \simeq \varprojlim \mathrm{B}_{K_i} \\ E_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\overline{K}_i/K} \end{cases} \tag{4}$$

i.e. on reconstitue les objets B_K, Π_K, $E_{\overline{K},K}$ à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\text{Ind(Corps type fini)} \longrightarrow \text{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K, \overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K},K}$, étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K, \overline{K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{K},K})$ [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à (plus précisément, à (,) !).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0, $\mathbf{Q}$ donc pour $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ et $\Pi_{\mathbf{Q}}$, qui a un objet canonique, noté $\overline{\mathbf{Q}}_0$ - la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans . On posera[6]

$$\Gamma_{\mathbf{Q}} = E_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}} \tag{5}$$

Pour tout corps K de caractéristique 0 - en particulière pour les corps K de type fini sur $\mathbb{Q}$, lequel nous allons nous borner par le suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{Q}uad\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbf{Q}} \tag{6}$$

[6]et on écrit souvent $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$ au limite des $E_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$, pour une clôture algébrique [] $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de Π_K i.e. un $\overline{K}/K$, d'où un $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, pour un homomorphisme de groupes profinis

$$E_{\overline{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}. \tag{7}$$

Par le suit, on regardes toujours B_K, Π_K ou $E_{\overline{K},K}$ comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note $\pi_{\overline{K},K}$ - on[7] l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois $E_{\overline{K},K}$ par opposition au quotient $E_{\overline{K},K}/\pi_{\overline{K},K} = \Gamma_{\overline{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, que j'appelle se partie "arithmétique"- celle-ci est un sous-groupe ouvert de $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, qui son [], correspond au sous-corps $\underline{K}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, extension finie $/\mathbf{Q}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K, de sorte qu'on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_{\overline{K}/K} \arrow[r] & E_{\overline{K}/K} \arrow[r] & \Gamma_{\overline{K}/K} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & & & \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} & \end{tikzcd} \tag{8}$$

On[8] va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$K = \varinjlim_i A_i \tag{9}$$

où les A_i sont les sous-$\mathbf{Q}$-algèbres de type fini de K, correspondant au système projectif des "modèles affines" $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de $K/\mathbb{Q}$. Parmi les A_i, il y a d'ailleurs un système [] fermé des A_i réguliers, i.e. des U_i lisses/$\mathbb{Q}$, [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme U_i des schémas "élémentaires" sur K_0, se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que $\mathrm{Spec}\, K = \eta$ est le point générique [] des U_i, qui sont [] sur k (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K).

Le choix de $\overline{K}$ définit un point géométrique $\overline{\eta}$ sur les U_i, d'où des groupes $\pi_1(U_i, \overline{\eta}) = \Gamma_i$, et [] bien connus

$$\mathrm{Spec}\, K = \varprojlim U_i$$

---

[7] on va noter $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ cette "partie arithmetique"

[8] **NB** $\pi_{\overline{K}/K} = (1)$ si et seule si K algébrique sur $\mathbf{Q}$, i.e. fini sur $\mathbf{Q}$.

$$(10) \qquad E_{\overline{K}/K} = \pi_1(\eta, \overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [\,] \quad (\Gamma_i = \pi_1(U_i, \overline{\eta}))$$

D'autre parte, si on pose

$$(11) \qquad \overline{U_i} = U_i \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$$

on a pour tout i une suite exacte d'homotopie

$$(12) \qquad 1 \longrightarrow$$

qui forment un système projectif de suite exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient Γ', et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\overline{U_i}, \overline{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux "géométriques" - que [ ]] d'ailleurs [ ], en utilisant un plongement de [ ] dans $\mathbb{C}$ (d'où un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}} \simeq \overline{\mathbb{Q}_0}$), comme les [ ] profinis de $\pi_1(U_i(\mathbb{C}), \overline{\eta})$, ou maintenant $\overline{\eta}$ est interprète comme un point [ ] aux variétés complexes $U_i(\mathbb{C})$.

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12) ([9]), ce qui donne en particulière

$$(13) \qquad \pi_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim_i$$

Utilisant les fibrations des U_i (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout π_i est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où [ ]). Ceci redonnes p. ex. que le dimension cohomologique de π_i est [ ], celle de E_i est $\leq n+2$ (pour des coefficients de m-torsion, [ ]) - et par passage à la limite, des [ ] correspondantes pour les dimension cohomologiques de $\pi_{\overline{K}/K}$ et $E_{\overline{K}/K}$

$$(14) \qquad \dim \operatorname{coh} + \pi_{\overline{K}/K} \leq n, \quad \dim \operatorname{coh} \Gamma_{\overline{K}/K} \leq n+2$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré d [ ] absolu de K.

[9] cette interprétation

Théorème **(1).** — *Soit K un corps extension de type fini de $\mathbb{Q}$, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Alors pour tout sous-groupe ouvert E de $E_{\overline{K}/K}$, son centralisateur dans $E_{\overline{K}/K}$ est réduit au groupe unité. Itou pour $\pi_{\overline{K}/K}$.*

Démonstration. — Soit $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ l'image de E dans $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans Γ des centralisateurs de E' dans E [] centralisateur de Γ' dans Γ. Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

Corollaire. — *Dans $\mathbb{\Gamma}_{\mathbb{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}_0}/\mathbb{Q}}$, le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit a (1).*

OPS Ce sous-groupe ouvert Γ' invariant, il est bien connue ([10]) qui son centre est réduit à 1 donc si Z est son centralisateur dans $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, l'homomorphisme $Z \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}}/\Gamma'$ est injectif donc Z est fini. Mais on sait que les seules éléments $\neq 1$ de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ d'ordre fini sont les conjugués de τ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de τ dans $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est réduit à [] donc on peut contenir Γ', donc $\tau \notin z$, donc $z = (1)$.

[] à $E \subset E_{\overline{K}/K}$, on voit donc que son centralisateur Z dans $E_{\overline{K}/K}$ est une image dans Γ réduite à $\{1\}$ donc $z \subset \pi_{\overline{K}/K}$. Soit $\pi' \subset \pi = \pi_{\overline{K}/K}$ le [] de z' sur π, c'est un sous-groupe ouvert de π, et on est ramené à voir que $\mathrm{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$, i.e. le

Corollaire. — *Soit π un groupe profini, extension successives de groupes profinis libres. Alors le centralisateur z dans π de tout sous-groupe ouvert π' de π est réduit à {1}.*

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini *libre*. On sait que π' est donc libre. OPS π' invariant, ([11]) et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc Z $\longrightarrow \pi/\pi'$ est injectif, donc Z est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément ([12]) d'ordre fini $\neq 1$ - ce qui [] la démonstration.

Scholie. — *Le fait que $E_{\overline{K}/K}$ soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde Π_K (ou le topos B_K) [] à équivalence près, définie a isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe* extérieure *associé à $E_{\overline{K}/K}$.*

[10] à vérifier
[11] à vérifier
[12] à vérifier

Les homomorphismes $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ associés à des homomorphismes $K \longrightarrow K'$ d'extensions de type fini de $\mathbb{Q}$, ayant une image ouvert dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou de groupoïdes $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$, sont détermines à équivalence près (définie a isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieures. Il [] en particulière ainsi de morphisme structurel $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ ou $\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$ qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieures $E_K \longrightarrow E_{\mathbb{Q}}$. Mais nous [] suivre [], en exploitant le fait que $\pi_{\overline{K}/K}$ est lui associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ par $\pi_{\overline{K}/K}$ est entièrement connue, à isomorphisme près, pour $\pi_{\overline{K}/K}$ et Γ fixés, en termes de *l'action extérieure* correspondant de Γ sur π, comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow Aut(\pi) \longrightarrow Autext(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour K fixé, donc k fixé, [] qu'on fixe un $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Q}/k}$ revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de k, [] qu'on fixe un $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_K \overline{k})$ signifie [] qu'on fixe une revêtement universel de $\mathrm{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$, les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ de K. Par le suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à []) les couples $(K, \overline{K})$ d'une extension K de $\mathbb{Q}$ de type fini, et d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, par les triples (π, Γ, φ), où $\pi = \pi_{\overline{K},K}$ et $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ sont des groupes profini, et $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ une action extérieur de Γ sur π - ce qui peuvent de reconstituer l'extension $\mathbb{E}_{\overline{K},K}$ de $\Gamma_{\overline{K},K}$ par $\pi_{\overline{K},K}$. J'ai oublie [] qu'il faut *de plus* se donner Γ comme sous-groupe d'un $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et une [] fidèle de Γ dessus - pour reconstruire [] cas données un homomorphisme de groupoïdes profinis $\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$, plus un objet de Π_K - ou encore, un morphisme de topos progaloisiens $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$, plus un point de B_K. On peut ainsi fixer un objet de $\Pi_{\mathbb{Q}}$, i.e. un point de $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$, i.e. un $\overline{Q}$, et étudier les K, avec un plongement de k (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K) dans $\overline{\mathbb{Q}}$ - mais [] donner une clôture algébrique $\overline{K}$ de K qui induise $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Ils sont décrits [?]

On a ainsi plusieurs [] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension K de type fini de $\mathbb{Q}$:

1) Pour le topos étale B_K, en tant que topos progaloisien sur $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$;

2) Pour le groupoïde fondamental Π_K de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de $\Pi_{\mathbb{Q}}$;

3) Pour le groupe extérieur E_K, au dessus de groupe extérieur $E_{\mathbb{Q}}$ ou $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ ([]) ;

4) En termes d'une clôture algébrique $\overline{K}/K$ (i.e. en décrivant le couple $(K,\overline{K})$ plutôt que K), par un objet $\overline{\mathbb{Q}} \in (\Pi_{\mathbb{Q}})$ et un homomorphisme de groupes profinis $E \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$;

5) En termes d'une clôture algébrique fixe $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, et où $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ [] les couples (K,i) où $i : k \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ est un plongement de la clôture algébrique k de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ des $\overline{\mathbb{Q}}$: pour le groupes extérieur $\pi_K = \pi_1(K)$, sur lequel un sous-groupe ouvert $\Gamma_K \subset \Gamma$ opère extérieurement par des groupes profinis *extérieures* $\pi_1(K) = \Gamma_K$, sur lesquels un sous-groupe ouvert Γ (non précisé []) de $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ opère *extérieurement* ;

6) En termes d'une $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$: pour le groupoïde $\Pi_{K\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}}$ [] .

Un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$ donne ([13]) [] à un homomorphisme de groupes extérieures, $\pi' \longrightarrow \pi$, où l'image de π' dans π est ouvert [] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [] que le morphisme de topos $B_{K'\otimes_K\overline{\mathbb{Q}}} \longrightarrow B_{K\otimes_K\overline{\mathbb{Q}}}$ es déterminé (a isomorphisme unique près) par [] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$ sur π' et π, de façon que $\pi' \longrightarrow \pi$ [] et ceci suffit pour reconstitue, d'une part les groupes extérieures E, E' extensions ("extérieures") de Γ [] π, π' (et , a équivalence rigide près, les B_K, $B_{K'}$ et $B_K \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$, $B_{K'} \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures $E \longrightarrow E'$ de Γ.

Remarque. — Quand $\pi \neq (1)$, i.e. K pas fini sur $\mathbb{Q}$, le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe $\pi' \subset \pi$ ouvert *dans* π, $\mathrm{Centr}_E(\pi') = \{1\}$.

Si z est se centralisateur, on a $z \cap \pi = (1)$ d'après le théorème 1, prouvons que l'image de z dans $\Gamma_{\overline{K},K} \subset \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ est finie (ce qui [] alors, que z est d'ordre 1 ou 2, et dans le [] cas que son image des $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ est [] pour un τ de conjugaison complexe).

[] E pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient a poser à une extension finie de K) [] $\pi' = \pi$, alors l'image z' de z dans Γ est contenue dans le noyau

[13] on suppose pour simplifier qui c'est

de l'homomorphisme $\varphi : \Gamma \longrightarrow [\,](\pi)$. [ ] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt ou cas où K est de degré de [ ] 1, et on est ramené ou cas des π_1 d'une courbe algébrique ...)

Théorème (**2**). ([14]) — *Le foncteur* $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi_{\mathbb{Q}}$ *des extensions de type fini de* $\mathbb{Q}$ *vers les groupoïdes profinis sur* $\Pi_{\mathbb{Q}}$ *est* fidèle *i.e. si deux homomorphismes* $f, g : K \longrightarrow K'$ *définissent des homomorphismes de groupoïdes sur* $\Pi_{\mathbb{Q}}$ *isomorphes*

$$\begin{tikzcd} \Pi_{K'} \arrow[rr, "f^*,g^*"] \arrow[dr, "p'"'] & & \Pi_K \arrow[dl, "p"] \\ & \Pi_{\mathbb{Q}} & \end{tikzcd}$$

(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$ *tel que pour tout objet* $\overline{\eta'}$ *de* $\Pi_{K'}$*, le carré*

$$\begin{tikzcd} pf^*(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim", "p(\alpha)"'] \arrow[d] & pg^*(\overline{\eta'}) \arrow[d] \\ p(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim"] & p'(\overline{\eta'}) \end{tikzcd}$$

est commutatif) alors $f = g$.

L'hypothèse sur f, g signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie $\overline{K'}$ de K', donnent via f [ ] g deux clôtures algébriques de [ ] l'on peut trouver un isomorphisme [ ] celui-ci ([15]) ([ ] d'identifier $E_{\overline{K}/K}$ et $E_{\widetilde{K}/K}$) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\overline{K'},K'} \longrightarrow E_{\overline{K},K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ fixée de $\mathbb{Q}$, en disant que les deux homomorphismes $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$ de groupes profinis extérieures (avec opérateurs $\Gamma_{\overline{Q},Q}$) sont égaux.

Écrivons comme [ ] $K = \varinjlim A_i$, donc $\eta = \mathrm{Spec}(K) = \varprojlim U_i$, on a (en termes d'un point géométrique quelconque $\overline{\eta}$ de $\mathrm{Spec}\, K$ i.e. en termes d'un $\overline{K}$)

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\overline{U}_i, \overline{\eta}), \quad \text{où} \quad \overline{U}_i = U_i \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$$

[14] En fait, ce théorème n'est pas spécial à $\mathbb{Q}$ - il [ ] avait sur un corps de [ ] quelconque est en fait
[15] induisant "l'identité" sur [ ] clôtures algébriques [ ]

et il suffit de voir que pour tout i, $f|A_i = g|A_i$ [] le fait que $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*)$: $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$ (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a $K' = \varinjlim A_j$, où les A_j contient $f_i(A_i)$ et $g_i(A_i)$, donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_j \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'}), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \mathrm{Spec}(A_j) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}.$$

Notons (prenant les V_j réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ sont surjectifs - donc $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ est surjectif, ce qui implique que l'égalité de $f^* \mathrm{et} g^* : \pi_{K'}[]\pi_1(\overline{U}_i)$ (comme homomorphismes extérieures) implique celle de $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$.

Donc l'égalité $f_i = g_i$ (d'où $f = g$) est conséquence de résultat plus général). “[] géométrique”

Corollaire **(1).** — *Soient X, Y des schémas de type fini réduits* 0*-connexes sur un corps algébriquement close k, et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes, on suppose que $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors*

a) Si Y se plongue par un $i : Y \longrightarrow G$ un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un $u \in Y$ (unique) tel que $g(x) = f(x) + u$ et pour tout $x \in X(h)$, i.e. $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$ (τ_u [])

b) Si Y est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes anbéliennes, et X [] et f ou g est dominant, alors $f = g$.

Démonstration. — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit ([16]) d'examiner les actions de $\pi(f)$, $\pi(g)$ sur les groupes abelianisés dans π_1, et même sur leurs composantes l-adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type “extension d'une V.A par une tore” de X, on sait que

1°) Les morphismes $f : X \longrightarrow G$ tel que $f(\alpha) = 0$ se factorisent de façon unique par $X \xrightarrow{can} J \xrightarrow{\varphi} G$ avec φ un homomorphisme de groupes algébriques ;

2°) Un tel homomorphisme φ est connu quand on connaît ses actions sur les $H_1(\ ,\mathbb{Z})$ ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit v - on ceux-ci sont denses ...

[16]En fait, dans a) il suffit de supposer que

3°) $H_1(X,\mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J,\mathbb{Z}_l)$.

De ceci, on conclut (par 3°)) que $H_1(f) = H_1(g)$ implique (si $f = \varphi \circ can$, $g = \psi \circ can$) $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$, donc par 2°) que $\varphi = \psi$, donc $f = g$ []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouvons l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ signifie donc qu'il existe $\alpha \in \pi_1(Y)$, tel que

$$\pi(f')(\gamma) = []\pi(j)(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in Im(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$. [] cette image est un sous-groupe *ouvert* de $\pi_1(U)$ ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit U ouvert $\neq \varphi$ de Y, $u \in G$, tels que $\tau_u U \subset Y$ [et tels que (désignant par f, f' les morphismes $y \longrightarrow y$ et $y \mapsto y$ en de U dans Y) $\pi_1(f)$ et $\pi_1(f')$ [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de $\pi_1(U)$] *alors* $f = f'$ voie $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] *arithmétique*.

Corollaire **(2).** — *Le condition $f = g$ de corollaire précédent, est valable si on suppose que K est de caractéristique 0, X [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

- *c) l'image de $\pi_1(F)$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$, Y est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;*

- *d) l'image de $\pi_1(X)$ par $\pi_1(f)$ a un centralisateur dans $\pi_1(Y)$ réduit à (1), et Y se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.*

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$ ($\pi_1(Y)$ étant extension successive de groupes profinis *fibres* anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un[17] plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), [] X pour un ouvert d'Artin []

La situation X, Y, f, g provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps K extension de type fini de $\mathbb{Q}$. Soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K dans k [] de K à $\overline{K}$. On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

[17] il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions $E(X/K) = \pi_1(X)$, $E(Y/K) = \pi_1(Y)$ de $E_{\overline{K},K}$ [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de $E_{\overline{K},K}$ sur ces groupes. On va montrer maintenant le

Corollaire **(3)**. — *Soient X, Y deux schémas de type fini sur un corps K extension de type fini de $\mathbb{Q}$, On suppose que Y se plongue dans une extension d'une V.A. par un tore, X réduit, X, Y [] 0-connexe. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, d'où des extensions "extérieures" $E_{X,K}$, $E_{Y,K}$ de $E_{\overline{K},K} =$ Gal$(\overline{K},K)$ [] $\pi_1(\overline{X})$, $\pi_1(\overline{Y})$, et pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, un morphisme [] de $E_{X,K}$ [] $E_{Y,K}$.*

Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de $\pi_1(Y)$ [] alors $f = g$.

En fait, il suffit même que ls homomorphismes d'*extensions* [] soient égaux, [] $f = g$. (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sue les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que $f(x)$ et $g(x)$ définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

Théorème **(3)**. — *Soit X un schéma de type fini sur un corps K, extension de type fini de $\mathbb{Q}$, on suppose que X est géométriquement 0-connexe et se plongue dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex. X est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).*

Considérons une clôture algébrique $\overline{K}/K$ et l'extension extérieure correspondant $E_{X/K}$ dans $E_{\overline{K}/K} =$ Gal$(\overline{K}/K)$ par $\pi_1(\overline{X})$ ($\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}$) et l'extension déduite de $\widetilde{E}_{X/K}$ de $E_{\overline{K}/K}$ par $\pi_1(\overline{X})_{ab}$. Considérons les applications

$$(*) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi(\overline{X}) - \text{conjugaison de scindages de } E_{X/K} \text{ sur } E_{\overline{K}/K}$$

$$(**) \qquad X(K) \longrightarrow \text{Classes de conjugaison de scindages}$$

Ces applications sont *injectives*.

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où X est lui-même un groupe algébrique G, extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

(16) $$G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [] \longrightarrow G[] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de $G(K)$ *infiniment divisibles* dans $\mathbb{Q}$. [] ici K étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que $G(K)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini - donc $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$ est injectif. Donc []

Remarque. —

[] x dans le "revêtement universel abélien" $\widetilde{G}$ de G construit comme $\varprojlim$ des revêtements $G(n) \simeq G$ de G, donnée, []. L'énonce dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

Complément. — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est le Jacobienne généralisée de Y, et il suffit de montrer le

Lemme. — *Soit Y une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur K algébriquement clos), $Y \hookrightarrow J^1_Y$ son plongement dans sa Jacobienne généralisée, $u \in J^0_Y(k)$ et U un ouvert non [] de Y, tels que $U + u \subset Y$. Alors $u = 1$, ou encore: l'application $x \mapsto x$ [] de U dans Y est l'identité.*

Par dévissage, on es ramené au cas où Y est une courbe. Supposons le d'abord complète, de suite que $U + u \subset Y$ implique $Y + u \subset Y$ - alors la [] est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que [] ce qui [] $J^0_Y(k)$ est nulle. Pour que $x + u$ soit de la forme y ($y \in Y$) il faut [] que $u \in \alpha$ et y aient même image dans $J^1_{\hat{y}}$, ce qui [] Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes $U \hookrightarrow iY$ induisant et $J : U \longrightarrow Y$ induit par lui, je dis que $H_1(i) = H_1(j)$, ou ce qui revient au même, puisque $Y \xrightarrow{\alpha} J'_Y$ induit un isomorphisme $H_1(\alpha) : H_1(Y) \longrightarrow H_1(J'_Y)$, que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque []. Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des $J^0_{\hat{y}}$ est égale à 1, et on [] comme précédemment. []

II. La question de pleine fidélité

Soient K, K' deux extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ - est-il vrai que tout $\Pi_{\mathbf{Q}}$-homomorphisme $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ provient d'un homomorphisme de corps $K' \longrightarrow K$? On est ramené aussitôt au cas où – une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ étant choisie, d'où un $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ – K et K' ont des sous-corps k, k' (clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K resp. K') isomorphes, avec des plongements $k, k' \longrightarrow \mathbf{Q}$ de même image, que E_K et $E_{K'}$ peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ par π_K resp. $\pi_{K'}$. La question est alors si *tout* homomorphisme de $\pi_{K'}$ dans π_K qui commute à l'action de Γ, est induit par un homomorphisme $K \hookrightarrow K'$. Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire K, K' à partir des extensions $E_K, E_{K'}$, ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de Γ dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à $\mathbb{P}^1_K$ convenablement troué ...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieure qui y commute que par voie géométrique – par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que $\mathbf{Q}$ (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de $\mathbf{Q}$). Encore faut-il se borner aux homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte – sinon, prenant pour $\pi_{K'}$ le groupe unité (i.e. $K' = k$), on trouverait un homomorphisme $K \longrightarrow k$ correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ (au lieu de $E_{K'} \longrightarrow E_K$) supposer que le centralisateur dans π_K de l'image de tout sous-groupe ouvert de $\pi_{K'}$ soit réduit à $\{1\}$ – on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors – de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à Γ) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions E_K et $E_{K'}$, qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement $K' = k$, donc $E_{K'} = \Gamma$, ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le Γ-homomorphismes de $\pi_{K'} = \{1\}$ (!) dans π_K, mais bien les *sections* de E_K sur Γ.

Question-conjecture. — *Soient K, K' deux corps, extensions de type fini de $\mathbf{Q}$, et un morphisme $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ de topos sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$.*

Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes [?]

(a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps $K \hookrightarrow K'$.

(b) L'image de l'homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ a une image ouverte.

(c) L'homomorphisme extérieure $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien[18].

NB. On sait que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) et que (b) équivaut à $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$ a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si $\operatorname{degtr} K'/\mathbf{Q} < \operatorname{degtr} K/\mathbf{Q}$, alors il n'y a pas de tel homomorphisme $E_{K'} \longrightarrow E_K$, compatible avec les projections dans

[18] (c) n'est pas assez fort, cf. plus bas…

$E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, en particulier, il en résulterait que toute section de E_K sur $\Gamma = \mathrm{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$, ou sur un sous-groupe ouvert Γ' de Γ, a un centralisateur non-trivial dans E_K – et comme son centralisateur dans Γ est réduit à $\{1\}$, cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si $\pi_K \neq 1$) $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$. Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) - il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [:]

(c′) L'homomorphisme $E^{\circ}_{K'} \longrightarrow E_K$ induit par $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien (où $E^{\circ}_{K'}$ est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \hat{}$$

Z*).

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert E' d'un E_K, le centralisateur dans E_K (non seulement de E' lui-même, mais même de E'°) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait[19] que pour tout sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, le centralisateur (non seulement de Γ', mais même) de Γ'° dans Γ est réduit à $\{1\}$.

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de E_K sur un sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, de sorte que Γ' opère (effectivement) sur π_K, on a (si K pas algébrique sur* $\mathbf{Q}$*, i.e. $\pi_K \neq \{1\}$) $\pi_K^{\Gamma'^{\circ}} \neq \{1\}$.*

À vrai dire, à certains égards les Γ_K sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder Γ_K comme un $\varprojlim$ de groupes $\Gamma_{U/\mathbf{Q}}$ associés à des modèles affines de K – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des $\mathrm{K}(\pi, 1)$ (au sens profini ...). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énonce de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans $\Gamma_{\mathbf{Q}}$) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes,associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

[19] à vérifier !

Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de $\mathbf{Q}$, les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des "modèles" élémentaires anabéliens, voire des modèles $\mathrm{K}(\pi, 1)$ généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps K, extension de type fini de $\mathbf{Q}$ – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde…) Si U, V sont des tels modèles, tout morphisme $V \longrightarrow U$ définit un morphismes de topos galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$, $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, et si U est élémentaire anabélien, ce morphisme et connu quand on connaît seulement $\mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_\ell)$ – ce qui est beaucoup moins que la classe d'isomorphie d'homomorphismes de $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$-topos. (Œn fait, sans hypothèse anabélienne sur V, dès que V se plonge dans une variété anabélienne, f est connu quand on connaît son action sur les topos étales…). Mais quels sont les homomorphismes $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, ou $E_U \longrightarrow E_V$, qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [:]

Conjecture fondamentale. — *Soient U, V deux schémas de type fini sur $\mathbf{Q}$, V séparé régulier, U une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Considérons un morphisme $\mathrm{B}_V \longrightarrow \mathrm{B}_U$ des topos étales sur $\mathbf{Q}$ – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs*

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

compatible avec les homomorphismes extérieurs dans $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$[20].

Conditions équivalentes [:]

(a) Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d'un morphisme $V \longrightarrow U$ sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)

(b) $f|E_V^\circ$ est anabélien, i.e. l'image par f de tout sous-groupe ouvert de E_V° a un centralisateur réduit à 1.

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où V est réduit à un point, où cela se réduit à la

[20]**NB** Pour l'unicité, on est ramené aussitôt au cas où V lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — *Soit* $\Gamma' \subset \mathrm{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$ *un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps k fini sur* $\mathbf{Q}$*, considérons un k-point de* U*, d'où un relèvement* $\Gamma' \longrightarrow E_U$*, de sorte que* Γ' *opère sur* π_U*. Ceci posé, on a* $\pi_U^{\Gamma'^{\circ}} = \{1\}$.

On étudiera par la suite les relations entre cette "conséquence conjecturale", et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les E.

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.[21]

Plus généralement, prenant maintenant pour U des schémas qui sont des $\varprojlim$ des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la $\varprojlim$ dans la catégorie des schémas), pour V un schéma $\varprojlim$ de schémas séparés réguliers de type fini sur $\mathbf{Q}$ (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes *dominants* de schémas $V \longrightarrow U$ doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs $E_V \longrightarrow E_U$ compatibles avec les projections dans $E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour U, V les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellementde type fini sur $\mathbf{Q}$.

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topos (pro)galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$ de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont `[les]` actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts Γ de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des $\mathrm{K}(\pi, 1)$ qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur $\mathbf{C}$, disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques ...) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ (ou plutôt la

[21]Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la $\varprojlim$.

catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par "recollement", la catégorie des schémas localement de type fini sur un K – tant [?] des [varier?] la catégorie des fractions qui s'en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels…

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base S localement noethérien donné[22], les foncteurs $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$, allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur S, vers la 2-catégorie des topos au-dessus de $X_{\text{ét}}$, est 1-fidèle (deux homomorphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que les morphismes de topos $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$ au-dessus de Set soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de $(\mathrm{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$ obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels… Exprimant ceci par exemple pour les automorphismes d'une courbe algébrique propre sur une extension fini de $\mathbf{Q}$, on retrouverait le "fait" que tout automorphisme extérieur de E_K (K le corps des fonctions de X) qui respecte la structure à lacets [?] et qui commute à l'action de Γ, provient d'un automorphisme de X.

III. Étude des sections de E_U sur Γ

Soit U un schéma connexe lisse de type fini géométriquement 0-connexe sur le corps K, d'où $E_U \longrightarrow E_K$, et ([23]) on se propose d'étudier les sections mod $\pi_{U,K}$-conjugaison - plus généralement, on [] un même topos [] les sections $E'_K \longrightarrow E_U$, où E'_K est un sous-groupe ouvert de E_K (ce qui signifie que [] fait une extension de base finie sur K). Si K de type fini sur le corps $\mathbf{Q}$ et si U se plonge dans une schéma sur un groupe commutatif rigide l'application

$$U(K) \longrightarrow [\,] \text{ d'isomorphisme section de } \mathrm{B}_U \text{ sur } \mathrm{B}_K [\,] \pi_{U_K} - \text{conjugaison de sections de} E_U \text{sur} E_K$$

est injectif. On va examiner d'entre façons "géométriques" de trouver des sections.

Supposons d'abord que U soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type $(0,0)$ ou $(0,1)$, i.e. $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$. On a que pour tout $i \in \widehat{\overline{U}} \backslash \overline{U}$ (point à

[22] S de caractéristique 0 ?

[23] On a choisie un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U pour définir X, et E_U, E_K, et $E_U \longrightarrow E_K$.

l'infini) le groupe de lacets L_i fournit un scindage (des [] i.e. []) en prenant son centralisateur $Z(L_i)$ dans E, d'où

$$(2) \qquad 1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une [] de $\overline{O}_{\widehat{U},i}$. L'un des donnes de conjugaison des scindages de (2) est un []

(3)

et [] injectivement de l'un des donnes de π-conjugaison de scindages.

Proposition. — ([24]) On suppose $(g,v) \neq (0,0),(0,1)$ *i.e.* $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$. *Alors les classes de π-conjugaison scindage de* (1) *définis pour les scindages de* (2) *sont distinctes de celles associés aux points de* $U(K)$. *Si de plus* $(g,v) \neq (0,2)$, *i.e. si [] est dans le cas anabélien, alors les classes de π-conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices $i = i_1$ et $i = i_2$ distincts, soient distincts.*

La première assertion s'obtient en "bordant" le trous i, alors la section envisagé devient la section de $U \cup \{i\} = U'$ associée au point i, et celle est donc distincte de celle associée aux [] points de U', i.e. aux points de U - a fortiori [] pour le sous-groupe [] par L_i. On [] de même pour [] que les [] de scindages associées a un L_{i_1} et un L_{i_2}, $i_1 \neq i_2$, sont distinctes, [] sauf le cas de type $(0,3)$ [] on tombe sur le type $(0,1)$, où [] de résultat d'injectivité. Mais on peut [], à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer Γ sur π, on a

$$(3) \qquad \pi^{\Gamma^\circ} = L_i$$

(donc $\pi^\Gamma = (1)$, d'ailleurs) - résultat que on [] plausible. [] que le [] de conjugaison de sections détermine le [] de conjugaison de L_i, donc i.

Conjecture **(A)**. — *Soit U courbe algébrique anabélienne géométrique* 0*-connexe sur corps K de type fini sur* $\mathbf{Q}$. *Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de* $U(K)$ [25], *Sont pas une section d'une extension (2), avec* $i \in I(\pi)^\Gamma$ *i.e. [] un point de* $\widehat{U} \setminus U$, *rationnel sur K.*

[24] C'est démontré sauf pour le type $(0,3)$ []

[25] Il y a [] plus []

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérait le corps de fonctions L de U et $E_L \longrightarrow E_K$ (E_L peut être considéré comme un groupe à lacets "infini" (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets L_i...) que tout scindage de cette extension provient d'une scindage d'une extension de type (2), avec $i \in I$ $\Gamma = X(K)$ $(X = \hat{U})$. Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de Γ° par ses sections,) et un [] ensemble des scindages qui est donc [$](\Gamma^0)$ conjugués (même s'il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve [] une description de $X(K)$ (donc ainsi de $X(K')$ pour toute extension finie K' de K) en termes de l'extension E_L de E_K par $\pi_{L,K}$, au même temps qu'une [] de reconstitue les $U = X \backslash I$ []

Donc en fait c'est la structure $E_L \longrightarrow E_K$ qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des U de type (g, v) $(2g + v \geq 3)$ [] le groupe "continue" d'automorphismes... La forme "modélique" de la conjecture précédente revient à la forme "birationalle", quand on y précise cette [] en disant que tout scindage de $E_U \longrightarrow E_K$ se revient au un scindage de $E_L \longrightarrow E_K$ (on ainsi, [] un scindage de $E_V \longrightarrow E_K$, si V est un modèle [] U).

On ne [] les conjectures précédentes (sous forme modèlique, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu'un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, [] X' de X [] $\widetilde{U}$ (où $X = \hat{U}$). (NB je m'abstient de le noter $\widetilde{X}$, [] il n'est pas [] sur X). Notons que pour $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$, l'un des L_i des $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$ [] en correspondance 1-1 avec [] fibre X'_i de X' au dessus de i.

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc X' peut être considéré comme le [] de $\widetilde{U}$, et de $X' \backslash I =$ ensemble des sous-groupes lacets de $\overline{\pi}$, qui apparaissent ainsi comme des "points à l'infini" des revêtements universel $\widetilde{U}$. D'ailleurs E_U s'interprète comme le groupe de [] schéma $\widetilde{U}$ [], et $E_U \longrightarrow E_K$ comme l'homomorphisme de passage au quotient [] (NB. $\overline{K}$ s'identifie a la clôture algébrique de K dans [], donc E_U opère sur Spec$\overline{K}$ de façon []) Une section de E_U sur E_K est donc une action de E_K sur $\widetilde{U}$, compatible avec son action sur $\widetilde{U}$ [] convenable (sans doute [] $\overline{U}_i$ finis sur $\overline{U}$ entre $\overline{U}$ et $\overline{U}$...). Considérons alors la

Conjecture **(B)**. ([26]) — *Toute telle action de* Γ *sur* $\widetilde{U}$ *admet* dans $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ *un point fixe et un seul.*

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e. $\widetilde{X} \in \widetilde{U}^T$, alors

1°) L'image de $\widetilde{X}$ dans U est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des α points distincts de $U(K)$ définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) [27] $\pi^\Gamma = (1)$ (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans $\widetilde{U}$ sur ce même $x \in U(K)$), et [ ]

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de L_i normalisé par Γ, i.e. une scindage des [ ] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oubli directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans X signifie qu'une même action effective [ ] à la fois un L_i et [ ] $(v \neq J)$ - Fait [ ] établi sauf dans le cas $(g, v) = (0, 3)$ - et l'unicité au dessus d'une $i \in I$ fixé signifie que le L_i (i fixé) normalisé par Γ est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \mathrm{Cen}\,\pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que Γ° agissant sur $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [ ] point fixe [ ] nécessairement fixe pour Γ). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$, comme il se devrait en général [ ] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \mathrm{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le [ ] $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$ [ ] !

[26] et même l'action induit de Γ° doit avoir un point fixe [ ] plus bas

[27] C'est un cas particulier [ ]

[ ] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [ ] un corps de base K de type fini de $\mathbf{Q}$, mais [ ] que K est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [ ] fini sur $\mathbf{Q}$).

Nous pourrons définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de $\overline{K}$ de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur K (donc courbes anabéliennes $\overline{U}$, $\overline{V}$ sur $\overline{K}$ définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré $\widetilde{\widetilde{U}}$ sur $\overline{K}$, on définit canoniquement sa complétion $\widehat{U}$ [ ] $\widehat{U}$. Ceci posé :

Conjecture **(B')**. — *Soient K un corps de type fini sur* $\mathbf{Q}$ *(ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être), $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, U une courbe de Poincaré sur $\overline{K}$, de complétion $\widehat{U} = X$. Considérons une action de* $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ *sur U, compatible avec sous-action sur $\overline{K}$, d'où une action de* Γ *sur X. Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de* Γ° *agissent sur X (*Γ°*, noyau de caractère cyclotomique* $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^*$*).*

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [ ], [ ] d'un groupe profini π, [ ] librement sur U de façon que $U_{/\pi}$ soit une courbe algébrique anabélienne sur $\overline{K}$.

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation ou K est [ ] pour un modèle S de K (disons, élémentaire anabélienne), quand U_K provient d'une courbe relative U_S sur S - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$E_{U_S} \longrightarrow E_S \tag{4}$$

de noyau $\pi_{\overline{U}}$, dont $E_{U_K} \longrightarrow E_K$ est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}[\,] \tag{5}$$

Ainsi, les sections de E_{U_K} sur E_K correspondant aux relèvement continus $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ de l'homomorphisme surjectif $E_K \longrightarrow E_S$ et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ correspondants existent aux sections de E_{U_S} sur U_S. Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de U_K/K i.e à des sections rationnelles des U_S sur S - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des $i \in I(U_{\overline{K}})$ rationnels sur K, i.e. à une section de $\widehat{U_S} \backslash U_S = S'$ (étale fini sur S) sur S. Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur $\mathbf{Q}$, et celle des extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\overline{\mathbf{Q}}_\circ}$, opérant extérieurement sur $\widehat{\pi_{0,3}}$, d'où déjà l'extension $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$, où $U_{0,3} = \mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}} - \{0, 1, \infty\}$.

Prenons les donne de $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de [] sections de $E_{0,3}$ sur $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$ i.e. les "points" telles que le centralisateur de Γ^0 soit trivial (sections "admissibles") [] des topos $\mathrm{B}_{\widehat{\pi_{0,3}},\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] sur $\mathrm{B}_{\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] - on trouve un ensemble sur lequel Γ opère (qui n'est autre que $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}_0})$, à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini I des sections, stable par [] la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur $\pi_{0,3}(I)$, de type [] sur lequel Γ opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut [] ainsi [] de trous $0, 1, \infty$ - on trouve donc l'équivalent groupoidel de la droit projective $\mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}}$, on l'appelle [] - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel Γ opère - en fait, ce n'est autre que E_{K_1}, où

$$K_1 = \mathbf{Q}(T_1) \tag{6}$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de $\mathbf{Q}$.

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoïdal de $U_{0,3}$ et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type $(0, \nu_2)$ sur K_1 (ou sur une extension finie de K_1) sont des courbes relatives de tipe $(0, \nu_2)$ sur une courbe sur $\mathbf{Q}$ (ou une extension finie de $\mathbf{Q}$, ou une revêtement étale fini d'une telle $U_{0\nu_1}$).

On procède [] pour construire finalement tous les E_K sur $E_{\mathbf{Q}}$ ([] tout corps extension de typew fini de $\mathbf{Q}$, est extension finie d'une extension transcendantal []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une X lisse sur un K et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des K, pour recollements de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire un telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau $K(\pi,1)$") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de $U = U_S$ schéma relatif sur S, "élémentaire" sur S - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à π_1 non nul, S étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur $\mathbf{Q}$, irréductible, corps de fonctions K, et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle f de U sur S, définissant une section de E_{U_K} sur E_K - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif, $E_K \longrightarrow E_S$ en $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ (composé de la section $E_U \longrightarrow E_{U_K}$ [] $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$). Je veux montrer que f est pourtant définie i.e. une section de U_S sur S, si et seule si le section de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S, i.e. si et seule si le relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$.

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur S" - de façon plus précis, si Z est un sous-schéma fermé de S de codimension ≥ 2, alors, posant $S' = S \backslash Z$, on a $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$ pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le même que celui de $E_K \longrightarrow E_{S'}$, ou, si [] (comme S' n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$, où les S'_i sont des ouvert "modèles" qui recouvrent S'. Si donc le conditions envisagés sont [] relativement aux S'_i (qui pourtant un recouvrement par S, [] S') - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les S'_i, i.e. sur S' - alors celle est vérifié relativement à S - ce qui est [] signifie que le section est [] sur S. Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de $U_{S'}$ sur S' []

une section de U_S sur S. [] d'une courbe relative $U_S = X_S - T$, X lisse sur S de dimension relative 1, T fini [] sur S, [] T décomposé sur S. Si X [] relatif ≥ 1, on sait ([] Weil) que le section [] une section de X, soit D l'image inverse de T, c'est un diviseur sur S, dont le [] sur $S' = S \backslash Z$ est nul, donc (comme codim $(Z,S) \geq 1$) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme $E_{U_S} \longrightarrow E_K$ est composé d'un relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ de $E_K \longrightarrow E_{D_n}$ avec l'homomorphisme canonique $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$. (relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ correspondant biunivoquement aux sections de E_{U_n} sur E_K, ou aux relèvements de $E_K \longrightarrow E_S$ ou $E_K \longrightarrow E_{U_S}$...).

Ceci dit [28], j'ai envie de prouver que $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$ [] i.e. provient d'une section de E_{O_n} sur O_n si et seule si la section rationnelle correspondant de U_S/S est définie en n. Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section phi de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S, si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphique).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait [] géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

Théorème. — *Soit T un trait ([]), U un schéma relatif "élémentaire" sur T, anabélienne* [29]*, K le corps des fonctions de T, On [] un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, d'où une clôture algébriquement $\overline{K}$ de K, et on considère l'extension $E_U = \pi_1(U;\widetilde{U})$ de $E_K = \pi_1(K,\overline{K}) \simeq$ Gal$(\overline{K}/K)$ par $\pi = \pi_1(U_{\overline{K}}, \widetilde{U})$. On a donc un carre cartésien des groupes profinis*

[]

[28]**N.B.**

[29]anabélienne [] - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de U ne soient que de type $(0,0)$ ou $(0,1)$ - i.e. à π_1 nul

où E_S s'identifie au quotient de E_K par le sous-groupe [] engendré par un groupe d'inertie $I_{K'} \simeq T_\infty(\overline{K})$, cf plus haut. Soit f_K, K un point de U_K rel/K, d'où une section $\Psi = \Psi_{f_K}$ de E_K sur E_{U_K}. Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes

(a) f_K se prolonge en une section de U sur S ;

(b) Ψ provient d'une section de E_U sur E_S ;

(b') le compose $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$ s'annule sur $I_{K'}$.

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliques par (a), est clair. C'est l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) qui demande une démonstration. On est [] au cas où T est strictement local (donc $E_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est réduit à son sous-groupes d'inertie, et $E_S = (1)$). On est ramené de prendre un [] au cas où $U_{/S}$ est une courbe relative élémentaire, $U = X \backslash T$, X lisse et propre. Alors f se prolonge en une section f au X sur S, et la conclusion [] que $f(S) \subset U$. Donc on est ramené [] au

Lemme. — *Soit X schéma projectif lisse de donne relation 1 connexe sur S trait strictement local, soit $T \subset X$ sous-schéma, fini étale sur S, donc $T \simeq I_S$, I ensemble fini, et soit $U = X \backslash T$ (donc T est défini par une [] $(g_i)_{i \in I}$ des sections disjointes de X sur S) si g est de genre relatif, $\nu = []I$, on suppose $(g, \nu) \neq (0, 1)$. Soit $i_0 \in I$, f une section de X/S distinctes des disjoints g_i, et telle que f et g_{i_0} coïncident en s (point fermé de S). Si $\eta = S \backslash s$, on a donc un morphisme $\eta \longrightarrow U$, d'où $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$. Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si $\nu \geq 2$, que pour la donné [] n'est pas trivial (pour [] distinct de la caractéristique résiduelle).*

Comme la section rationnelle de $J^1_{X/S}$ défini par f est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec $\mathrm{H}_n(J^1_{X/S}, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul - i.e. le $\mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$ s'envoie dans la partie torique de $\mathrm{H}_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$ [], qu'est canoniquement isomorphe à T_ℓ^I / T_ℓ. (**N. B** cette partie est nulle si card $I = i$, et dans ce cas le critère homologique [] insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell (\simeq \mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T_\ell^I / T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisage, $\nu \geq 2$ (et traiter [] le cas $\nu = 1$). Je vais dériver le résultat : soit $x = g_{i_0}(s)$, $A = \underline{O}_{X,n}$, V l'anneau de S, J_{i_0}

l'idéal de l'homomorphisme $A \xrightarrow{g_{i_0}^*} V$ associé à [], c'est donc une idéal inversible de A -soit de même J_f l'idéal associé à $f^* = A \longrightarrow V$, et considérons $g_{i_0}^*(J_f)$, c'est une idéal de V engendré par un générateur, et comme $g_{i_0} \neq f$, on voit que cet idéal n'est pas nul. Soit $H = [\,]\nu / g_{i_0}^*(J_f)$, cet entier [] de g_{i_0} et f, ces [] comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je [] que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I / T_\ell$$

est le produit [] des l'injections canoniques $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$, correspondant à l'indice i_0. Il faudrait que [].

Reste le cas $\nu = 1$, qui semble demander un traitement séparé [30]. [] à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à p) c'est que l'homomorphisme extérieur $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ est égal à $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$, où K_{i_0} est l'homomorphisme "local"

$$[\,]$$

associé à l'indice i_0. Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une U courbe relation sur une S avec $U = X \backslash T$, X lisse et propre sur S, T fini étale, avec sections g_i donnée de T sur S, les "sections de 2^{eme} espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées [31] à $i = i_0$ - que définit une classe de π-conjugaison de sous-groupes ouverts lacets L_i dans π. (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$ est nul, ce qui [] le cas si $\pi_2(S) = 0$, p. ex []) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 (la réconstruction de ces [] étant sans doute [], si on [] aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...) [] L_i dans E_U s'envoie *sur* E_S, on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1 \tag{13}$$

[30] Ceci doit être indépendant de la [] de ν !

[31] en tous cas, même sous []

La classe d'isomorphisme est un élément

(14)

que je ne propos d'étudier. On [] si S est un $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou $\mathrm{Pic}(S) = []$)

(16) $$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)[]$$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où S est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, $\mathrm{Pic}(S)$ est un Z-modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

(18) $$\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)\hat{} \longrightarrow \mathrm{H}^2(S, T)$$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe c (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \mathrm{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de X le [] de g_i. Principe d'une vérification : [] la complété formel de X [] de $g_\nu(S)$, [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de S. On a donc à prouver une historie d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si $g_i = 0$ i.e. [], globalement sur S, []

Quand $g_i = 0$, parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de J_i/J_i^2 qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

[]

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le "cas arithmetique" [] on trouve donc

[]

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de T sur S comme section à l'infini, OPS ([] à se localiser) $U_S = \mathbb{E}'_S \backslash T'$, donc f s'identifie à une section de $\mathbb{E}^1_S$ sur S', i.e. de $\underline{O}_S$ sur S, donc (comme codim $(2, S) \geq 2$ []) elle se prolonge en une section de $\mathbb{E}'_S$. Et on [] comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles $D_i$sur S, ou ce qui revient au même, les points x_v de X de codim 1, i.e tels que $\underline{O}_{x_v}$ soit un [] () anneau de valuations discrète). Considérons son [] $\overline{\underline{O}_{x_v}}$ dans $\overline{K}$, [] un idéal maximal [] (ces idéaux correspondent aux points [] $\widetilde{S}$ de S dans $\overline{K}$ au dessus de x) et considérons son stabilisateur N_n dans E_K, qui opère donc dans $k(\widetilde{x}) = \overline{k(x)}$, et s'envoie en fait, on le sait, *sur* $\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$.

Soit $I_{\overline{x}}$ le noyau de l'homomorphisme obtenue ([] "géométriques" de []), donc on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow [\,]\, \mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1 \tag{7}$$

et par Kummer une isomorphisme canonique[32]

(8)

On notera que si x est le [] du diviseurs D, alors $k(x)$ est le corps des fonctions de D. C'est un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$.

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour S soit $\mathbf{Q}$) que le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le sous-groupe [] engendré par les $I_{\widetilde{n}}$. Donc l'hypothèse que $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le dit noyau, signifie aussi qu'il [] sur [] des $I_{\widetilde{n}}$. Soit alors $U_{\underline{O}_x}$

[32]à corps de [] de car 0 !

induit par U sur Spec $\mathbf{Q}_x$, on a donc des factorisations d'ailleurs $\mathbb{G}_n(S)$ n'a pas [], donc

22)

est injectif[33]. Ainsi, quand $g_i = 0$ i.e. quand (13) admet des scindages "géométriques" (et il suffit []) ceux-ci forment un torseur sous $\mathbb{G}_m(S)$, qui s'identifie à une sous-torseur des [] de tous les scindages de (13). Pour que la "description profinie de la géométrie algébrique absolu sur $\mathbf{Q}$ soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d'extensions des type (1) peut se "spécialiser" en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [] situation

Dans la cas [] où f n'est pas définie sur S, on trouve une action de 2^{nde} espèce, [] L_i dans π.

À vrai dire

[]

(31)

J'ai l'action extérieure de T sur π n'est souvent pas triviale (je conjecture qu'elle l'est si et seule si il y a "bonne réduction") - donc le groupe E_K n'opère pas lui même extérieurement sur π. Mais tout scindage de (30) définit une extension de E_K par π, donc une action extérieure [] "admissible", définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [], si ce n'est la courbe "réduit" de type (g, v) ([]) ? [] ce pourrait être celle ci :

Conjecture-à-[]. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) U_η a bonne réduction sur S ;

(b) L'action extérieure de T sur π est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [] scindage de (31) - p. ex défini par un point de U_η [] induit un homomorphisme $T \longrightarrow \pi$);

[33] (cas "[]")

(c) L'action de T sur $\pi_{ab} = H_1(U_{\overline{\eta}})$ est triviale ;

(d) Itou pour

(e) En termes de une section de (30)

(f) En termes de une section de (30)

On a [ ]
[ ]
J'ai donc [ ] un [ ] général (qui je pourrais à la occasion [ ] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [ ] de groupes E_k (K extension de type fini de **Q**) sur des π à lacets, qui (sans doute)] géométriques, par la considération de courbes de type (g,v) "se réduisent [ ]". Mais je [ ] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [ ] géométriques [ ] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [ ] de ce n°.

IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si X est une schéma connexe, je note

$$E_X = \Pi_1(X) \tag{1}$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si $\widetilde{X}$ est un revêtement universel profini de E_X, par

$$E_X^{(\widetilde{X})} = \pi_1(X;\widetilde{X}) = Aut_X(\widetilde{X}) \tag{2}$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau (le plus souvent une corps) je note E_A, et $E_A^{\widetilde{A}=E_X^{(\widetilde{X})}}$. Si A est une A-algèbre telle que Spec($\widetilde{A}$) = $\widetilde{Y}$ soit une revêtement universel de X (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si ξ est une "point géométrique" de X, on note

$$E_X^{\xi} = \Pi_1(X_1\xi) = E_X^{\widetilde{X}(\xi)}, \tag{3}$$

où $\widetilde{X}(\xi)$ est le revêtement universel de X [ ] en ξ. Le choix de ξ correspond d'une [ ] [ ] et d'une extension séparablement close Ω de $k(x)$ ([ ] clôture algébrique de $k(x)$) et on note alors ainsi E_X^{Ω} au lieu de E_X^{ξ} (Ω sous entendu [] extension de $k(x)$ donc avec sa structure de $k(x)$ algèbre) []

$$E_X^{\Omega} = E_X^{\overline{k(x)}}, \tag{4}$$

où $\overline{k(\alpha)}$ est la clôture algébrique de $k(\alpha)$ dans Ω. Bien sur, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on note aussi E_A^{Ω} – notation [] utilisée [] $E_K^{\overline{K}}$, K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique [] séparable de K.

Si X est un Y-schéma, 1-connexe, on []

$$E(f) : E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où} \quad f : X \longrightarrow Y \tag{5}$$

E_X est un foncteur en X

$$(\text{Sch conn}) \quad \longrightarrow \quad \text{Group ext}$$

qui se précise pour l'homomorphisme injectif des groupes profinis

$$E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{Y}} \tag{6}$$

où $\widetilde{Y}$ est le revêtement universel de Y défini par $\widetilde{X} \longrightarrow Y$ ($\widetilde{X}$ [] pouvoir écrire en fait $E_Y^{\widetilde{X}}$, plus géométriquement E_Y^Z chaque fois qu'on a un Y-schéma Z 1-connexe, jouent le rôle de "foncteur fibre" pour le topos $\mathrm{B}_{\pi(X)}$ des revêtements étales de Y.)

On peut désir que

$$(X, \widetilde{X}) \mapsto E_X^{\widetilde{X}} \tag{7}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes X *munis* une revêtement universel (on [] d'un Z 1-connexe s'envoyant dans X) vers celle des groupes profinis. Ceci s'applique en particulier en regardons la sous-catégorie des (X, ξ) munis d'un point géométrique - on a donc

$$E_X^{\xi} \longrightarrow E_Y^{\eta} \tag{8}$$

si on a un homomorphisme de schémas "géométriques profinis" $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$. On note que tout [] géométrique de X en un $x \in X$ - i.e. une extension [] Ω de $k(\alpha)$ [] - et l'homomorphisme (8) s'identifie ainsi a

$$E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}} \tag{9}$$

où $\overline{k(\alpha)}$, $\overline{k(\eta)}$ sont les clôtures séparables *dans* Ω.

On poserons

$$E_{X/Y}^{\widetilde{X}} = \mathrm{Ker}(E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{X}} = E_Y^{\widetilde{Y}}) \tag{10}$$

C'est un foncteur par un triple $\widetilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ avec X, Y 0-connexe, $\widetilde{X}$ un revêtement universel, plus généralement, si $T \longrightarrow X$ avec 1-connexe, on pose

$$E_{X/Y}^{T} = \mathrm{Ker}(E_X^{T} \longrightarrow E_Y^{T}) \tag{11}$$

([34]) on a un foncteur []. Cas particuliere $E_{X/Y}^{\xi}$, ξ un point géométrique de X, $E_{X/Y}^{\Omega}$, $E_{X/A}^{\widetilde{X}}$ (si $Y = \mathrm{Spec} A$), $E_{B/A}^{\widetilde{B}}$...

[] on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) ([35]) pour $X \longrightarrow Y$, alors le donnée (pour $X \longrightarrow Y$ donné) de $T \longrightarrow X$, (avec T 1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

et d'un relèvement en $T \longrightarrow X$, ou ce qui revient au même, d'une section de $X_T = X \times_Y T$ sur T. Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme [] (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$E_{X/Y}^{T} \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E_{X_T}^{T} \tag{12}$$

et on []

$$1 \longrightarrow E_{X/Y}^{T} \longrightarrow E_X^{T} \longrightarrow E_Y^{T} \longrightarrow 1 \tag{13}$$

(Cette hypothèse [] satisfait si $Y = \mathrm{Spec} K$, K un corps, Si X est géométriquement 0-connexe sur K).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour [] avec $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$ surjectif,

[34]**NB**. $E_{X/T}^{T}$ []

[35]Cas où $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$ est [un] épimorphisme

On ([36]) [] une factorisation de $X \longrightarrow Y$ en

$$X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \tag{14}$$

avec Y' étale fini ou pro-étalefini sur Y et $E'_X \longrightarrow E_Y$, était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$E^T_{X/Y} \xrightarrow{\sim} E^T_{X/Y'} \tag{15}$$

qui peut donc se [] comme

$$E^T_{X \times_{Y'} T} \simeq E^T_{X/Y} \tag{16}$$

qu'on peut noter $E^T_{X_T}$, mais en faisant attention que [] X_T [] non plus $X \times_Y T$ (qui va être disconnexe si $Y' \longrightarrow Y$ pas isomorphisme) mais $X \times_Y T$.

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois Gal$(\overline{K}, K)$ de $\overline{K}/K$, $\overline{K}$ est la clôture séparable de K telle que Spec$\overline{K} \simeq \widetilde{Y}$. Souvent, on notons Γ, ou Γ_K, $\Gamma^{\overline{K}}_K$, au lieu de E_Y - surtout si K est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de "partie géométrique" à distingue d'une "partie arithmétique"...

Soit K un corps (qui pourrait être algébriquement clos), L une extension de type fini de K, X un "modèle" propre régulière de L. Alors $E^{\overline{L}}_X$ s'identifie a un quotient de $E^{\overline{L}}_L$, *qui ne dépend pas de modèle X défini*, comme il est [] c'est la partie "universelle géométrique" [] qui classifie les schémas (finis) étales sur L qui sont "non isomorphes" sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de L/K.

Si U est un modèle quelconque, il se plonge dans un X, et on a des homomorphismes surjectifs [] Z partie ferme de X

$$E^{\overline{L}}_X = E^{\overline{L}}_L \simeq E^{\overline{L}}_U / \text{ sous-groupe fermé } []$$

Notons que $E^{\overline{L}}_L$ es e imite projective de $E^{\overline{L}}_U$, pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E^{\overline{L}}_L \simeq [] E^{\overline{L}}_U$$

[36] Sous l'hypothèse "suite exacte d'homotopie" mais avec fibres []

et de même, bien sûr

$$\pi^{\overline{L}}_{L/K} \simeq [\,]\pi^{\overline{L}}_{U/K}.$$

[]

dont le choix "effectif" dépend de celui d'un revêtement universel ou encore d'une point géométrique [] de $\widetilde{K}_n$ - i.e. d'une clôture algébrique de $\widetilde{K}_n$ []

[]

est que $a \in U$.

Ceci posé, $E^{\overline{L}}_U$ se récupère à partir de $E^{\overline{L}}_L$, comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les V de L [] un centre sur U (il suffit même de prendre les $V = \underline{O}_{U,n}$, où se est [] de codim 1 des U), et [] correspondants.

On peut regarder

[]

Mais il en est [] ainsi comme on voit en considérant $V_1 = V \cap L_1$, qu'est un anneau de valuations de L_1, ([37]) dont le corps [] fini sur K si celui de V l'est (donc $V_1 \neq L1$) - donc V_1 correspond à une "place" des corps de fonctions d'une variable L_1 sur K. [] E°_K centralise T_{V_1}

Conjecture. — Soient K, L des extensions de type fini de $\mathbb{Q}$, $K \subset L$. Alors

a) *Toute section de E_L sur E_K (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur T_V associée à un anneau de valuations V de L contenant K, à corps résiduel algébrique sur K et V est uniquement ([38]) [] cette condition [] au dessus de E_K.*

b) *Soit U un modèle "élémentaire" de L sur K, anabélien. Alors tout section de $E^{\overline{L}}_U$ sur $E^{\overline{K}}_K$ se relient [] une section de $E^{\overline{L}}_L$ sur $E^{\overline{K}}_K$.*

À noter que ce question 2° est[] locale [] elle doit être essentiellement "triviale", que [] vraie un [] - par contre 1°, est une question de [] globale sur U, et sans doute [] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de $E^{\overline{L}}_U$ sur $E^{\overline{L}}_K$ associes a un anneau de valuations de L/K de corps résiduel K, que l'image de $E^{\overline{L}}_K$ doit normaliser un sous-groupe [] de $\pi^{\overline{L}}_{L/K}$, qui est non trivial si le valuation []

[37] Il faut []

[38] []

centre sur U, i.e. si le section n'est pas associé à un point K-rationnel de U, ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment a propos de N_V, I_V, ...),

STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

1. Courbes standard

Soit k un corps algébriquement clos. Une "courbe standard" sur k es une schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

a) X quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1

b) Tout point de X est soit lisse, soit un "point quadratique" (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe Spec($k[X,Y]/XY$) au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique [] $\widehat{X}$ de X, telle que X soit un schéma propre, qui X s'identifie à un ouvert dense de $\widehat{X}$, et que $\widehat{X}$ soit lisse sur les points de $\widehat{X}\backslash X = I$. Alors $\widehat{X}$ est une courbe projective, I est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant [] ouvert des points des lissité de $\widehat{X}$. [] A des points singuliers de X s'identifie à []

La donnée de X équivaut à celle des $(\widehat{X}, I)$, où $\widehat{X}$ est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points [] ordinaires - et I est un sous-schéma fini étale de $\widehat{X}^{\text{lisse}}$, ou ce qui revient au même, une partie fini de $\widehat{X}^{lisse}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard X nous avons associé les systèmes de données suivantes :

[]

Inversement, [] on construit une courbe standard X en passant au quotient dans $\widetilde{A}_k Y \backslash I_k$ par l'involution σ - i.e. X est universel [] pour la donnée p:

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

Ainsi la catégorie des courbes standard sur k [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

N.B. On récupère $\widehat{X}$ comme quotient de Y par σ.

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \widetilde{A}/\sigma$ et I comme sous-schémas fermés finis étales sur S, et [] $X = \widehat{X} \backslash I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \widetilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\widetilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ([39]).

N.B. []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif Y, mais Y avec la structure supplémentaire $\widetilde{A}, I, \sigma_{\widetilde{A}}$...).

2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où $Y, I, \widetilde{A}, \sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

(7) $$S = \pi_\circ(Y) \simeq \text{[] des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

(8) []

[39] faux tel quel

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les [] en passant aux $\pi_\circ$.

Le système ($\widetilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\widetilde{A}}$) où [], peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets, et $\widetilde{A}$ l'un des [] l'application σ étant l'application "origine d'un []". Ce graphe ne dépend que de $\widehat{X}$, pas de X i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est [] compte de ce choix que l'on considère, [] plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$I \longrightarrow S \tag{9}$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de X (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" []) de X, correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible X_α correspond au sommet α des graphes, alors les [] fermés en α correspondent bieunivoquement aux points doubles de X_α - donc [] X_α sont lisses [] l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une $\widehat{X}$ convenable - et même avec des composantes X_α de genre g_α donné (i.e. des $\widetilde{X}_\alpha$ de genre g_α...). De plus, [] $I \longrightarrow S$ (I [] fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard S.

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les donnes suivantes

[]

Une structure formée d'une graphe fini $G = (S, \widetilde{A}, \sigma)$, d'une ensemble fini I au dessus de l'une des sommets de G, et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, [] appelé ici une "maquette".

Proposition. — *Considérons la maquette d'une courbe standard X*

a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors α, β appartiennent à la même composante connexe de graphe G, si et seule si X_α et X_β appartiennent à la même composante connexe de X. Donc on a une bijection canonique

$$\pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X), \tag{11}$$

en particulier X est connexe si et seule si G_X est connexe.

b) Supposons X connexe i.e. $\widehat{X}$ connexe, i.e.[] on a alors [] i.e. [] où []

.

3. Courbes "stables" et MD-graphes

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est "stable", si elle satisfait à l'un des conditions équivalentes suivantes

a) $\operatorname{Aut} X$ est fini

b) Pour tout α, $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \widetilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.

   1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 1$
   2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 3$

c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \widetilde{A}$ est nul.

d) $\underline{\mathrm{Aut}}_{(Y, \widetilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k. On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de "Mumford-Deligne" ou de "modulaire") si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1, et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD-graphes.

NB. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \varnothing$)

b) elle n'est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 []

c) les sommets []

Proposition. — *Si $(G = (S, \widetilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ est une MD-graphe, son type (g, ν) est anabélien, i.e. $2g + \nu \geq 3$.*

Si on avait $g=1$, $\nu=0$, alors la relation

$$g=1=\sum g_\alpha+h_1$$

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et h_1 [], ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* G, si sa maquette est isomorphe à G, on dit qu'elle est G-*épinglée* si on se donne un isomorphisme entre se maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X},\underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G. Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X},\underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S ($\underline{S},\underline{\widetilde{A}},\sigma_{\underline{\widetilde{A}}},\underline{I},\underline{\widetilde{A}}\longrightarrow\underline{S},\underline{I}\longrightarrow\underline{S},\underline{S}\xrightarrow{g}\mathbf{N}_S$) (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle G-épinglage entre $(\widehat{X},\underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X},\underline{I})$. Si

$$\Gamma=\operatorname{Aut}G \tag{18}$$

(groupe fini), les G-épinglages de $(\widehat{X},\underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain Γ_S-torseur, appelé *torseur de G-épinglages* de $(\widehat{X},\underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, le catégorie ([]) des courbes standard G-épinglées. Pour tout $\alpha\in S$

N.B. Si $\operatorname{card}J=\nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de M_G (pour G semi-stable) et de $M_{[G]}=(M_G,\Gamma)$.

4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient S une multiplicité schématique, X une schéma relatif sur S, propre sur S, $\underline{I}$ une sous-schéma fermé de X. On dit que $(X,\underline{I})$ est une MD-courbe relative sur S, si X, $\underline{I}$ sont plats de présentation finie sur S, et si pour tout point géométrique de

S, la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [ ] c'est une fonction localement constant sur S.

Fixons nous une type numérique (g, ν) *anabélien* $(2g + \nu \geq 1)$, et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

(24) $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}(S) =$ MD-courbes relatives sur S, de type numérique égal à (g, ν)

On a alors le vraiment [ ] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ([40]). — *Le groupoïde fibré* $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}/S$ *sur* Sch *(plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique* $\widehat{M_{g,\nu}}$, *qui est* lisse *et* propre *sur* Spec $\mathbf{Z}$, *D'autre part* $M_{g,\nu}$ *est un ouvert de Zariski de* $\widehat{M_{g,\nu}}$, *schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[ ]. Nous allons revenus là dessus maintenant.

5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

[40]On suppose $2g + \nu \geq 3$ (cas anabélien)

6. Morphismes de [] de graphes et de maquettes

7. Étude des [] de dim ≤ 2 [] détermination des graphes correspondantes

8. Structure []

9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([] MDT-structure) : cas [],

10. Structures MDT analytiques : []

11. Digression : [] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux

12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [] et leur dévissages en "topos élémentaires"

13. Digression sur stratification "locales" []

Une *stratification globale*

RAPPORT D'ACTIVITÉ
(1.10.1984 — 15.12.1984)
par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres *"Récoltes et Semailles"* et *"Pursuing stacks"*, part 1: *"The Modelizing Story"*. Je prévois que cette préparation m'absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d'une "algèbre topologique" (commencé avec la première partie de "À la Poursuite des Champs"), en reprenant le fil de la réflexion de l'"Histoire de Modèles" là où je l'avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans "Esquisse d'un Programme", par. 7.

Il s'agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d'appeler *"algèbre topologique"*) qui jouerait le rôle un peu du pendant "algébrique" de la topologie générale, un certaine nombre de visions parcellaires provenant de l'algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l'algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des n-catégories et celle des n-champs de telles n-catégories (encore dans les limbes). Le besoin d'une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d'oeuvre "À la Poursuite des Champs", me sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d'une *"géométrie arithmétique"*, synthèse (entièrement imprévue encore jusqu'aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Je développe réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l'essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivi dans "Récoltes et Semailles". Qu'il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd'hui comme il y a vingt ans, l'algèbre topologique (laissée pour compte après mon "départ" en 1970) est avant tout un des principaux *outils d'appoint* pour le développement de cette "géométrie arithmétique", dont le développement jusqu'au stade d'une pleine maturité m'apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps.

Un des signes principaux d'une telle maturité serait une maîtrise complète des notions et idées autour de la notion de *motif*, que j'ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon "départ" en 1970 et —- à une exhumation partielle près en 1982 — jusqu'à aujourd'hui même…), ainsi qu'une maîtrise des principales notions et idées de*géométrie algébrique anabélienne* que j'ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d'idées, le courant "abélien" incarné par la notion de motif, et le courant "anabélien" exemplifié par la structure géométrique-arithmétique de la "tour de Teichmüller", sont à la "géométrie arithmétique" dans son enfance, ce que courants "complexes de cochaînes — catégories dérivées commutatives" sont à l'algèbre topologique (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d'avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l'espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l'écriture de "Pursuing Stacks". Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c'était le cas naguère pour le développement d'une "topologie générale" (faite sur mesure pour l'analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l'"algèbre topologique" est, avant toute autre chose, le *développement d'un langage*, dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorf et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associées aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers (correspondants aux cas "locaux" des corps p-adiques) ont été déterminés récemment par Uwe Jannsen, Kay Wingberg et (dans le cas $p = 2$) Volkier Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental principale d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuths" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, avant toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par. 7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes des principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, t de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes idées à de sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties" des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivi cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne — d'une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d'autre part, entreprendre une étude géométrie-arithmétique minutieuse de la "tour de Teichmüller", et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

LE BI-ICOSAÈDRE

Extrait de "Récoltes et Semailles"

[…] Il me faut d'abord donner quelques explications préliminaires purement géométriques, sur la combinatoire de l'icosaèdre gauche et sur la notion de bi-icosaèdre gauche. Comme il semblerait que je sois le seul qui ait jamais pris la peine (et le plaisir) de regarder l'icosaèdre (ordinaire ou "gauche", au choix) du point de vue combinatoire, et qu'il n'y a donc aucune référence dans la littérature sur ces choses (qui devraient être "bien connues" depuis plus de deux mille ans), je me fais un plaisir de développer ici "en forme" le peu dont nous aurons besoin, pour nous y reconnaître[41].

Dans la suite, on se donne un ensemble S à six éléments (S, comme "sommets"). Les éléments de S s'appelleront *"sommets"*, et les parties à deux éléments de S (ou

[41]Mes réflexions sur l'icosaèdre, avec un fort accent sur l'aspect combinatoire, datent de 1977, où j'ai fait un cours de DEA d'une année sur ce thème magnifique. Cela a été en même temps ma première grosse frustration dans mon expérience enseignante. Malgré le niveau délibérément très élémentaire et très "visuel" où j'ai placé le cours, avec l'espoir de voir s'y impliquer les auditeurs (étudiants de troisième cycle ou enseignants à mon Université), je n'ai pas réussi à vraiment déclencher une étincelle de vrai intérêt et de participation en aucun. La seule exception a été la mise au point, par un ou deux parmi les auditeurs, de tracés de la projection stéréographique sur le plan de l'icosaèdre (vu comme inscrit sur la sphère unité, avec les arêtes figurées par des arcs de grand cercle), en faisant apparaître en même temps le dodécaèdre dual. Il es vrai que ces tracés stéréographiques (en prenant comme centre de projection soit un sommet, soit le milieu d'une arête, soit le centre d'un face) sont de toute beauté, surtout quand on tient compte du coloriage canonique des arêtes (voire, des faces également) en cinq couleurs…

"paires") dans S s'appelleront *"arêtes"*. Enfin, pour abréger, on appellera *"triangles"* (de S) les parties de S à trois éléments. Si on désigne par $A(S)$ ou A, et par $T(S)$ ou T l'ensemble des arêtes et l'ensemble des triangles de S, on vérifie aussitôt que l'on a

$$(S) = 6, \quad A = 15, \quad T = 20$$

(où la première relation est mise pour mémoire). (NB si E est un ensemble fini, (E) désigne le nombre de ses éléments.)

Définition **1**. — *Une partie F de l'ensemble T des triangles de S est appelée une* structure icosaédrale *(sous-entendu : gauche) sur S, si toute arête de S est contenue dans exactement deux triangles appartenant à F.*

En d'autres termes, si on appelle *"faces"* les triangles éléments de F, la condition envisagée dit que *chaque arête est contenue dans exactement deux faces*. Un ensemble S à six éléments muni d'une structure icosaédrale F est appelé un *icosaèdre combinatoire* (sous entendu : "gauche", pour ne pas confondre avec l'icosaèdre "ordinaire", qui a douze sommets au lieu de six), ou simplement un icosaèdre (gauche). Si $I = (S, F)$ et $I' = (S', F')$ sont deux tels icosaèdres, on appelle *isomorphisme* de l'un avec l'autre toute bijection

$$u : S \xrightarrow{\sim} S'$$

telle que $u(F) = F'$, i.e. telle que les faces de I' soient exactement les images par u des faces de I.

On peut "regarder" un icosaèdre en "centrant" son attention soit sur un sommet, soit sur une arête, soit sur une face, de façon à obtenir trois types de "perspectives" différentes, pour l'étudier. Ce sera la perspective centrée sur une face, qui sera la plus commode pour notre propos actuel. Voici l'énoncé récapitulatif, contenant tout ce qui nous sera nécessaire (et au delà) :

Théorème **1**. —

a) Deux icosaèdres (combinatoires gauches) sont toujours isomorphes, et plus précisément, il y a exactement 60 *isomorphismes de l'un avec l'autre.*

b) Un icosaèdre a exactement dix faces. Si f est une face d'un icosaèdre $I = (S, F)$, f'' une face d'un icosaèdre $I' = (S', F')$, alors pour toute bijection u_0 de f avec

f', *il existe un isomorphisme et un seul* u *de* I *avec* I', *tel que* u *transforme* f *en* f'' *et induise entre* f *et* f' *la bijection* u_0.

c) Soit $I = (S,F)$ *un icosaèdre, et* F' *le complémentaire de* F *dans* T, *i.e. l'ensemble des triangles de* S *qui ne sont* pas *des faces. Alors pour toute face* $f \in F$ *de* I, *son complémentaire* f' *dans* S *(i.e. l'ensemble des sommets qui n'appartiennent* pas *à la face* f*) est dans* F' *(i.e. est un triangle qui n'est* pas *une face de* I*). L'application*

$$f \mapsto f' : F \longrightarrow F'$$

est une bijection de F *avec* F'. *Enfin,* F' *est également une structure icosaèdrale sur* S *(appelée structure icosaèdrale* complémentaire *de la structure* F*).*

d) Soient S *un ensemble de sommets à six éléments,*

$$\mathrm{Ic}(S) \subset \mathfrak{P}(T(S)) \quad (= \textit{ens. des parties de } T(S))$$

l'ensemble des structures icosaèdrales sur S. *Alors* $\mathrm{Ic}(S)$ *a douze éléments, et l'application*

$$F \mapsto F', \quad \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \mathrm{Ic}(S)$$

et une involution sans points fixes de cet ensemble (i.e. on a, pour tout F *dans* $\mathrm{Ic}(S)$, $(F')' = F$ *et* $F' \neq F$.*)*

e) Soient F *une structure icosaèdrale sur* S, F' *la structure complémentaire,* $f \in F$ *une face de* F, $f' \in F'$ *la face de* F' *complémentaire de* f. *Pour tout sommet* $s \in f$, *soit* s' *le "troisième sommet" de l'unique face* $f(s)$ *de* F, *distincte de* f, *contenant l'arête* $a_s = f - \{s\}$. *On a alors* $s' \in f'$, *et l'application*

$$s \mapsto s' : f \longrightarrow f'$$

est une bijection de f *avec* f', *notée*

$$u_f : f \xrightarrow{\sim} f'.$$

On définit de même (en interchangeant les rôles de F *et de* F'*) une bijection*

$$u_{f'} : f' \xrightarrow{\sim} f.$$

Ses bijections sont inverses l'une de l'autre :

$$u_{f'}u_f = \mathrm{id}_f, \quad u_f u_{f'} = \mathrm{id}_{f'}.$$

f) Soit S un ensemble à six éléments, f un triangle de S, f' le triangle complémentaire, P_f l'ensemble des bijections de f avec f' (c'est un ensemble à six éléments), et $\varepsilon_f = \{f, f'\}$ la partie à deux éléments de $T(S)$ (ensemble des triangles), formée de f et de f'. Pour toute structure icosaèdrale F sur S, soit

$$c(F) = (\alpha(F), u(F)) \in \varepsilon_f \times P_f$$

défini ainsi : $\alpha(F)$ est égal à f ou à f', suivant que $f \in F$ ou $f' \in F$ (i.e. $\alpha(F)$ est l'unique élément de ε_f tel que $\alpha(F) \in (F)$, et $u(F)$ est égal à u_f (notations de d))). On a donc défini une application

$$c : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cette application est bijective. *En d'autres termes, "il revient au même" de se donner une structure icosaèdrale F sur S, ou de se donner un couple d'éléments (φ, u), où φ est l'un des deux éléments f, f' (celui qui doit être face de F), et où u est une bijection $f \xrightarrow{\sim} f'$.*

Démonstration du théorème. La partie a) est conséquence de b), compte tenu qu'il y a exactement 6 bijections de f avec f' et 10 faces de I', et que $60 = 10\ 6$. D'autres part, dans d) le fait que $F \mapsto F'$ soit une involution sans points fixes, est évident sur la définition donnée dans c). Quant au fait que $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, cela résulte aussitôt de a) par un argument de "comptage" standard (vu que le groupe de toutes les bijections de S avec lui même a $6! = 654321 = 720$ éléments, et que le sous-groupe stabilisateur de F en a soixante, d'où le nombre

$$12 = 720/60 \quad .)$$

Une autre façon de retrouver 12 (via la "perspective autour d'une face" expliquée dans f)) est par[42]

$$12 = 2 \times 6.$$

[42]Il s'agit ici de la description, utilisant la "perspective" centrée sur une face. Il y a deux autres

Il y a donc à prouver seulement les parties b), c), e), f). Dans b), c), f) on part d'une structure icosaédrale donnée (S,F). Comme chaque arête est contenue dans deux faces, il existe au moins une face, soit f. Sot f' son complémentaire dans S, et considérons l'application

$$u_f : f \longrightarrow f', \quad a \mapsto a'$$

définie dans e). Montrons qu'elle est injective, donc bijective (puisque f et f' ont même nombre d'éléments, savoir trois). Si on avait deux sommets distincts $a \neq b$ dans f, tels que $a' = b'$, alors posant

$$c = a' = b'$$

et désignant par s le troisième sommet de f, on aurait une configuration

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dash] & & b \arrow[dl, dash] \\ & s \arrow[d, dash] & \\ & c & , \end{tikzcd}$$

avec trois faces $\{s,b,c\}$, $\{s,c,a\}$, $\{s,a,b\}$ se rajustant cycliquement autour de s, le long d'arêtes communes $\{s,a\}$, $\{s,b\}$, $\{s,c\}$. Je dis que ce n'est pas possible.

descriptions toutes aussi instructives de l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$, obtenues par la perspective centrée soit sur une arête, soit sur un sommet. Enfin, je signale aussi la bijection canonique suivante

$$\mathrm{Ic}(S)\,\mathrm{Bic}(S) \times \omega(S),$$

où $\mathrm{Bic}(S)$ désigne l'ensemble des structures biicosaédrales sur S, et $\omega(S)$ l'ensemble à deux éléments formé des "orientations" de S (i.e. l'ensemble quotient de l'ensemble des "repères" de S i.e. des numérations de ses éléments de 1 à 6, par l'action du sous-groupe alterné du groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$). L'application est obtenue en associant à toute structure icosaédrale F, d'une part la structure biicosaédrale associée $\{F,F'\}$, et d'autre part une certaine orientation $\mathrm{or}(F)$ de S canoniquement associée à F, que je me dispense de décrire ici. Il se trouve que l'on a

$$\mathrm{or}(F) \neq \mathrm{or}(F'),$$

de sorte que les deux structures icosaédrales correspondant à une même structure biicosaédrale $\{F,F'\}$ sont "repérées" par les deux orientations possibles de S.

Soient en effet u et v les deux points de S distincts des points précédents s, a, b, c, considérons l'arête $\{s, u\}$, et soit h une face qui la contienne. Alors le troisième sommet de h (distinct de s et u par définition) ne peut pas être égale à un des trois points a, b, c, disons a, car l'arête $\{s, a\}$ serait contenue dans trois faces de l'icosaèdre. Donc le troisième sommet est v, et l'arête $\{s, u\}$ ne serait contenue que dans le seul triangle $\{s, u, v\}$, absurde.

Nous avons maintenant qui si a, b, c sont les trois sommets de la face f, alors les sommets a', b', c' dans f' sont distincts, donc les six sommets de l'icosaèdre sont a, b, c, a', b', c'. Nous pouvons maintenant écrire la liste de l'ensemble de toutes les faces de l'icosaèdre, via la "perspective par rapport à f". Pour bien visualiser cette liste, il est pratique de faire un dessin, où les sommets sont figurés par des points du plan, les arêtes par des segments joignant ces points, et les faces par des aires triangulaires délimitées par les trois arêtes contenues dan la face. De plus, pour une bonne visibilité du graphisme, on va faire figurer chacun des points a', b', c' (mais non a, b, c) en *deux* exemplaires, dont le deuxième sera désigné (en tant que point du plan) par a'', b'', c'' respectivement. Ainsi, a' et a'' sont des points différents du plan, mais qui désignent le même élément de l'ensemble "abstrait" S.

On trouve la figure suivante, qui peut aussi être interprétée comme une vue "en perspective" de l'icosaèdre régulier ordinaire dans l'espace, vue "centrée" sur une face (nommée $\{a, b, c\}$)

Sur cette figure apparaissent dix figures (triangulaires), parmi lesquelles les quatre faces de départ

$$(1) \qquad f = \{a, b, c\}, \quad f_a = \{b, c, a'\}, \quad f_b = \{c, a, b'\}, \quad f_c = \{a, b, c'\}$$

plus les six faces "externes", se raccordant par paires le long des trois arêtes $\{a, a''\} = \{a, a'\}$, $\{b, b''\} = \{b, b'\}$, $\{c, c''\} = \{c, c'\}$. Donc, en toutes lettres

$$(2) \qquad f_{a,b} = \{a, a'', b'\} = \{a, a', b'\},$$

et les cinq triangles similaires $f_{a,c}$, $f_{b,c}$, $f_{b,a}$, $f_{c,a}$, $f_{c,b}$. Pour montrer que $f_{a,b}$ (par exemple) est bien une face, on note que l'arête $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ doit appartenir à deux faces, dont le troisième sommet ne peut être ni b ni c (car chacune des arêtes a, b et a, c sont déjà contenues dans deux parmi les quatre faces (1)), donc il ne reste comme possibilité que b' et c', d'où les faces $f_{a,b}$ et $f_{a,c}$.

Je dis que l'ensemble de ces dix faces épuise l'ensemble F de toutes les faces. Pour ceci, comptons le nombre d'arêtes figurant dans notre graphisme représentatif. Trois pour f, deux supplémentaires pour chacun des trois triangles f_a, f_b, f_c (ça fait neuf), trois arêtes de la forme $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ (fait douze), et six qui forment le contour de la figure (arêtes de la forme $\{a', b''\}$ etc), ça fait dix-huit, alors qu'il n'y en a que quinze arêtes en tout ! Mais on note que les arêtes telles que $\{a', b''\}$ et $\{a'', b'\} = \{b', a''\}$, symétriques par rapport au centre de la figure, représentant une seule et même arête de S (savoir $\{a', b'\}$ en l'occurrence), ce qui fait que le compte est bon : toutes les arêtes de S figurent sur notre tracé, et une seule fois sauf celles de triangle $\{a', b', c'\}$, lesquelles y figurent deux fois.

Ceci dit, un rapide coup d'oeil sur la figure nous convainc que chacune des arêtes qui y figurent, appartient bien à exactement deux parmi les dix faces précédentes et une seule. Si donc il existait une face h qui ne faisant pas partie de ce paquet de dix, alors une arête contenue dans h appartiendrait à au moins trois faces, absurde.

Ainsi, on est arrivé expliciter le "tracé" d'un icosaèdre quelconque, à partir d'une de ses faces, comme une "figure standard". La partie b) du théorème 1 est une conséquence immédiat de cette détermination.

Ainsi, b) donc aussi a) sont prouvés, prouvons c). Le fait que pour une face f (que nous pouvons prendre comme notre face centrale), le triangle complémentaire ne soit pas une face, est immédiat sur notre tracé, puisque $f' = (a', b', c')$ ne figure pas parmi nos dix faces. Comme l'ensemble T des triangles à 20 éléments et que F en a dix, F' en a dix, et comme l'application $f \mapsto f'$ de F dans F' est évidement injective, elle est bijective. En d'autres termes, pour qu'un triangle f de S soit une face, il faut *et il suffit* que le triangle complémentaire ne le soit pas.

Pour terminer de prouver c), il reste à prouver que F' est une structure icosaédrale, donc que pour toute arête L de S, il y a exactement deux triangles éléments de F' qui la contiennent. Passant aux complémentaires dans S, cela revient à dire que toute partie "carrée" de S (i.e. une partie ayant quatre éléments), contient exactement deux faces (pour la structure icosaédrale F). Or les faces non contenues dans cette partie $S - L$ sont exactement celles qui rencontrent son complémentaire $L = \{a, b\}$, i.e. celles qui contiennent soit a, soit b. Or l'ensemble F_a des faces contenant le sommet a a exactement cinq éléments (voir le tracé, où on peut bien sûr supposer que a est bien un sommet de la face de départ f utilisée pour faire le tracé), et de même pour F_b, d'autre part l'intersection $F_a \cap F_b$ est formée des faces qui contiennent l'arête $\{a, b\}$, donc a exactement deux éléments. Il s'ensuit que $F_a \cup F_b$ a $5+5-2=8$ éléments. Comme F en a dix, il reste bien deux éléments de F pour être contenus dans $S-L$.

Il reste à prouver e) et f). Dans e), il ne reste plus qu'à prouver la relation

$$u_{f'} u_f = \mathrm{id}_f,$$

et la relation symétrique (qui s'en déduira en échangeant les rôles de F et de F'). Utilisant encore f pour faire le tracé plus haut, cette relation se lit sur la figure : l'appliquant à a par exemple (ce sera pareil pour b et c) cette relation $(a')' = a$ équivaut simplement à dire que le triangle $\{b', c', a\}$ est une face pour F', c'est à dire, n'est *pas* une face pour la structure de départ, ce qui est bien le cas.

Reste à prouver f), i.e. la bijectivité de l'application

$$c : F \mapsto (\alpha(F), u(F)) : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cela signifie que pour tout couple (φ, u), où φ est un des triangles f, f' et où u est une bijection $u : f \xrightarrow{\sim} f'$, il existe une unique structure icosaédrale F dont il provienne. Si $\varphi = f$, cela revient à dire qu'il existe une unique structure icosaédrale admettant f comme face, et donnant lieu à la bijection u - et c'est bien ce que nous avons vu dans la construction explicite de tantôt. Si $\varphi = f''$, cela signifie qu'il existe une unique structure F tel que $f' \in F$, et que $u_f = u$. Désignant par F' la structure icosaédrale complémentaire, cela signifie aussi qu'il existe une unique structure icosaédrale F' telle que $f \in F'$ et $u_f = u$, ce qui (au changement de notation près) est ce qu'on vient de voir.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

Définition **2**. — *Soit S un ensemble à six éléments. On appelle* structure biicosaédrale *(combinatoire gauche) sur S, une paire formée de deux structures icosaédrales complémentaires l'une de l'autre.*

En vertu de la partie d) du théorème, il y a donc sur S exactement $12/2 = 6$ structures biicosaédrales. D'après la partie f), si f est un triangle de S et f' le triangle complémentaire, l'ensemble S^* de ces six structures icosaédrales est en correspondance biunivoque canonique avec $P_f =$ ensemble des bijections de f avec f'. De façon plus précise, si on identifie l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$ des structures icosaédrales sur S avec l'ensemble produit $\varepsilon_f \times P_f$ comme dans f), alors l'opération $F \mapsto F'$ de passage à la structure icosaédrale complémentaire s'interprète comme l'opération

$$(\varphi, u) \mapsto (\varphi', u),$$

où pour tout φ dans l'ensemble à deux éléments $\varepsilon_f = \{f, f''\}$, φ' désigne l'autre élément de ε_f.

On appelle *biicosaèdre combinatoire gauche*" (ou simplement *biicosaèdre*) un couple $(S, \{F, F'\})$ formé d'un ensemble S à six éléments, et 'une structure biicosaédrale $\{F, F'\}$ sur S, formée de deux structures icosaédrales F, F' complémentaires l'une de l'autre.

On définit les *isomorphismes* de tels objets de la façon habituelle. On notera que deux biicosaèdres sont isomorphes, et l'ensemble des isomorphismes de l'un sur l'autre a exactement 120 éléments. Par exemple, si on regarde les automorphismes d'un biicosaèdre $(S, \{F, F'\})$, ceux-ci forment un "groupe" (au sens technique mathématique du terme : stabilité par composition et par passage à l'inverse), lequel se décompose en deux sous-ensembles disjoints, ayant chacun 60 éléments (faisant donc bine un total de 120) : le premier est formé des bijection de S avec lui-même (ou "permutations" de S) qui transforment F en lui-même, ou ce qui revient au même, F' en lui-même - en d'autres termes, ce sont les automorphismes de l'icosaèdre (S, F) (ou (S, F')). Le deuxième est formé des permutations qui transforment F en F', ou ce qui revient au même, F' en F, c'est à dire encore les isomorphismes de l'icosaèdre (S, F) avec (S, F'). Par la partie a du théorème 1, il y en a bien 60 également.

Là je me suis laissé entraîner à en dire nettement plus que ce qu'il faut pour mon propos "philosophique"[43]. La chose essentielle, c'est de bien voir la structure de l'icosaèdre (gauche), mise en évidence sur le tracé de la page PU 119, la

[43](14 avril) Par contre, c'est peu pour mon ardeur de mathématicien, laquelle s'est à nouveau réveillée ces jours derniers - et voilà repartie ma réflexion sur l'icosaèdre, cet amour mathématique de mon âge mûr ! Je vais donc peut-être rajouter à ces notes (en appendice ?) quelques compléments sur la combinatoire de l'icosaèdre et sur la géométrie des ensembles à six éléments…

notion d'icosaèdre complémentaire (donnant lieu à la notion de biicosaèdre), et enfin la description de structures icosaédrales ou biicosaédrales sur S, en termes de l'ensemble P_f des six bijection d'une triangle préalablement donné f de S, avec son complémentaire f'. Enfin, du point de vue de l'intuition géométrique spatiale de la structure combinatoire, il est fort utile, pour s'y reconnaître, d'avoir chez soi un modèle en carton de l'icosaèdre régulier ordinaire[44], lequel a douze sommets, trente arêtes et vingt faces, et de "visualiser" un icosaèdre combinatoire gauche, comme décrit (de façon essentiellement canonique, en un sens qu'il serait facile à expliciter[45]), en termes d'un icosaèdre "ordinaire" ou "pythagoricien" (vu comme un solide dans l'espace), en prenant comme sommets, arêtes et faces de l'icosaèdre gauche, les *paires* de sommets, arêtes ou faces diamétralement opposées du solide pythagoricien. C'est bien dans cet esprit qu'a été fait le tracé de la page PU 119, où les paires $\{a', a''\}$, $\{b', b''\}$ et $\{c', c''\}$ désignent justement des paires de sommets opposés de l'icosaèdre-solide, et de même pour les paires d'arêtes ($\{a', b''\}, \{a'', b'\}$) etc, qu'il nous avait fallu justement identifier à une seule arête.

---

[44]J'en ai un chez moi, et de toute beauté, qui représente la "copie" d'un élément de première année de Fac, pour un examen de fin d'année d'un "cours d'option" (en collaboration avec Christine Voisin) sur l'icosaèdre (en 1976, je crois). Contrairement à mon cours de DEA l'année suivante sur le même thème, ce cours adressé à des étudiants frais émoulus du lycée avait rencontré une participation chaleureuse. Les résultats à l'examen étaient si brillants que mes collègues professeurs ont cru à un canular que j'aurais monté pour discréditer le fonction enseignante, et ils ont diminué d'office toutes les notes d'un tiers (les 18 sur 20 devenant 12 sur 20). C'est à cette occasion que j'ai appris avec stupéfaction que la plupart de mes collègues considéraient comme choquante l'idée qu'un étudiant puisse prendre du plaisir à étudier et à préparer un examen. Eux-mêmes s'étaient bien assez emmerdés pour faire les études et arriver à leur belle situation de prof. de Fac, il n'y avait vraiment aucune raison que les autres à présent ne s'emmerdent à leur tour…

[45]Si on a deux telles "réalisations" par des icosaèdres-solides (ou "pythagoriciens"), alors il existe une *unique* similitude directe de l'un avec l'autre, compatible avec ces réalisations i.e. avec les "marquages" des paires de sommets opposés par les points de S. Si les deux icosaèdres ont même "taille" i.e. même longueurs d'arêtes, alors la similitude en question sera même un "déplacement".

VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction récouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension $\leq n$".

Une "forme de dim 0" soit pour définition [] dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

Modèle de dimension 1. — Une tel modèle

[]

1) Deux ensembles de [] L_α (ensemble des *lieux* de modèles) et S (ensemble des *segments* des modèle)

2) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L)$, $I \longrightarrow \widetilde{I}$ (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre S et L.

3) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L)$ []

N.B. J'ignore s'il faut supposer que I est connu, quand on connaît

Modèle d'une forme 1-dimensionnelle

L ensemble de "lieux"
S ensemble de "segments"

II. Réalisations topologiques des réseaux

1. — [] topologique

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ partie fermée non vide de X. $X_{/A}$ l'espace déduit de X en [] A en un point, a le point déduit de A par []. Si X' est une partie de X contenant A, alors $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$ identifié $X'_{/A}$ à un sous-espace topologique de X.

Les fermées de $X'_{/A}$ s'identifient aux fermées de X' qui on bien contient A

III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une [] axiomatique a structure [] réseaux sur un [] L ([] de "lieux").

[]

Exemple 2 Soit L un ensemble ordonnée, on suppose L filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand [] plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une *[] ordonnée*.

IV. Analysis situs (première mouture)

V. Algèbre des figures

VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une [], je vais décrire ce qui sera [] avec notion de multistrates" - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts [] donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

I. "Algèbre des figures" ou "Ateliers".

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$L, M, F \tag{1.1}$$

liées entre eux par diverses applications, et [] muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques invectives

$$L \overset{b)}{\hookrightarrow} M \overset{a)}{\hookrightarrow} F \tag{1.2}$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou L à une sous-ensemble de M, M à un sous-ensemble de F.

Il y a d'autre part deux entre paires d'applications, que voici :

(1.3) []

où $\mathrm{Fig}(M)$ désigne la partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ formée des figures ensemblistes dans M. On peut considérer que le première application correspond à une relation entre M et F, appelée relation d'incidence. Pour une figure F, $\widehat{T}$ s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déployement* de la figure F. Si $X \in M$, $F \in \widetilde{F}$, on dire que le multistrate X est *incidente* à la figure F ou encore que c'est une *strate de la figure F*, si $X \in \widetilde{F}$. D'autre part, tout élément X de M (i.e. toute multistrate), [] comme une figure par (1.2), admet un déployement $\widetilde{X}$, et on pose

(1.4) []

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des M, [] fidèlement par l'un $\widetilde{F}$ des strates de F.

En fait, M sera muni d'une relation d'ordre $\leq$, [] plus bas, et $\widetilde{F} \subset M$ sera une partie fermée de M, et pour tout $X \in \widetilde{F}$, on aura

$$\widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\} \tag{1.5}$$

À cause de cette interpolation, la passage de $\widetilde{F} \subset M$ à $\mathrm{Fig}_M(F)$ est à tout [], que cette figure ensembliste des M un semble revenant important - mais à voir…

VII. Analysis situs (troisième mouture)

VIII. Analysis situs (quatrième mouture)